Contributions à la caractérisation et à l'étude des propriétés statistiques de familles de lois de probabilité

Angelo Efoévi Koudou

Université de Lorraine
École Doctorale IAEM

Mémoire

présenté en vue de l'obtention de l'

Habilitation à Diriger des Recherches

Discipline : **Mathématiques Appliquées**
Spécialité : **Probabilités et Statistique**

par

Angelo Efoévi KOUDOU

Contributions à la caractérisation et à l'étude des propriétés statistiques de familles de lois de probabilité

Soutenu publiquement le 8 décembre 2014 devant le jury composé de

M. Philippe CHASSAING	Professeur, Université de Lorraine
Mme Anne GÉGOUT-PETIT	Professeur, Université de Lorraine
Mme Hélène MASSAM	Professeur, York University, Toronto
M. Thomas SIMON	Professeur, Université Lille 1
M. Pierre VALLOIS	Professeur, Université de Lorraine
M. Jacek WESOŁOWSKI	Professeur, Ecole polytechnique de Varsovie

sur la base de rapports rédigés par

M. Persi DIACONIS	Professeur, Université de Stanford
Mme Hélène MASSAM	
M. Thomas SIMON	

Remerciements

Cette soutenance est le résultat d'un processus ayant nécessité des soutiens de divers ordres.

Je voudrais tout d'abord adresser mes vifs remerciements à Persi Diaconis, Hélène Massam et Thomas Simon qui ont bien voulu prendre le temps, malgré leurs multiples occupations, de lire attentivement mon travail et d'écrire les rapports. Ces remerciements vont aussi aux pré-rapporteurs, Anne Gégout-Petit et Charles Suquet.

Je remercie infiniment Hélène Massam qui me fait l'honneur d'être membre du jury. Elle n'a pas redouté de faire un voyage long et sans doute fatigant depuis Toronto.

Je me suis inspiré plus d'une fois des travaux de Jacek Wesołowski. Je le remercie d'avoir bien voulu effectuer le trajet Varsovie-Nancy pour participer au jury.

Thomas Simon vient de moins loin que les deux membres du jury cités plus haut, mais il a dû modifier son planning d'enseignement pour faire le voyage éclair Lille-Nancy.

C'est un honneur de compter, parmi les membres du jury, Anne Gégout-Petit, qui démontre chaque jour que professionnalisme et bonne humeur peuvent faire bon ménage.

Merci à Philippe Chassaing, pour qui j'ai une grande estime, d'avoir renoncé à un séminaire important à Paris pour participer au jury.

J'ai été accueilli dans le laboratoire par Pierre Vallois qui m'a souvent soutenu scientifiquement en me proposant des sujets de recherche intéressants, même s'ils n'ont pas toujours donné lieu à des publications. Intrigué comme moi par la propriété de Matsumoto-Yor, il a suggéré des pistes de généralisation qui ont conduit à notre premier article commun. Je le remercie aussi d'avoir accepté d'être mon parrain scientifique et membre du jury. J'espère poursuivre avec lui une collaboration fructueuse.

La procédure administrative concernant l'habilitation à diriger des recherches implique à un moment donné le responsable d'équipe. Je remercie Olivier Garet de sa participation bienveillante au processus.

Je remercie tous les coauteurs des travaux présentés dans ce mémoire : Denys, Pierre et Christophe avec lesquels j'ai eu des collaborations très enrichissantes. Merci aussi à Aurélie qui m'a fait bénéficier de sa maîtrise du logiciel R, et à Sévérien, même si notre article, en cours d'amélioration, attend encore sa soumission imminente.

Quoique n'ayant pas vraiment eu de collaboration scientifique avec Bernard Roynette, il m'est de temps en temps arrivé, comme à beaucoup d'autres, de profiter de sa grande culture mathématique jusqu'à son départ à la retraite. Je l'en remercie.

Merci à Nathalie Benito d'avoir organisé les voyages des membres du jury. Je suis reconnaissant envers Didier Gemmerlé, Bernard Schorp, Laurence Quirot, Elodie Cunat, Stéphanie Jourdan, Hélène Jouve, Estelle Carciofi, et toutes celles et ceux qui sont passés à l'Institut Elie Cartan et qui, dans leurs domaines de compétence respectifs, m'ont énormément aidé dans mes activités de recherche.

Le financement des missions constitue une aide importante pour le travail d'un chercheur. Je tiens à souligner à cet égard le soutien de mes responsables d'équipe successifs Pierre Vallois, Philippe Chassaing, Olivier Garet, mais aussi celui, occasionnel mais hautement utile, de Rémi Peyre. J'ai aussi pu compter sur le soutien financier de l'IUT Nancy-Charlemagne dont je remercie les directeurs successifs Hervé Coilland, Herbert Néry et Renaud Lallement, ainsi que les chefs successifs du département GEA, Bernard Humbert, Jean-Marie Monnez et Delphine Wannenmacher.

Je voudrais exprimer ici mon attachement aux collègues du département GEA de l'IUT Nancy-Charlemagne, que je côtoie depuis de nombreuses années dans le cadre de mes activités d'enseignement. Je remercie en particulier Jean-Marie Monnez, responsable de l'enseignement de mathématiques, qui est un exemple de sérieux, de droiture, d'exigence et de bienveillance vis-à-vis des étudiants et des collègues, et sait créer une ambiance amicale entre collègues. Un merci tout particulier à Sophie, avec laquelle je partage le bureau avec grand plaisir, pour l'esprit de confiance qui anime notre travail. Qu'elle trouve ici l'expression de mon admiration et de mon profond respect. Je n'oublie pas les collègues des autres disciplines enseignées à l'IUT, dont Joëlle qui m'a souvent témoigné son soutien, et Géraldine qui fait preuve d'efficacité et de patience dans la gestion du diplôme dont nous assumons la responsabilité conjointe.

L'administration du département GEA a toujours été compréhensive à l'égard de mes demandes récurrentes de déplacement de cours en vue d'assurer des missions de recherche. Un grand merci et une pensée affectueuse à Julie et Stéphanie qui assurent le secrétariat du département GEA, et aussi à Mme Laurence Sourin qui a été à ce poste pendant de nombreuses années, et qui jouit actuellement d'une retraite bien méritée.

Je remercie Serge Carrega, responsable du service de reprographie à l'IUT, pour sa disponibilité et sa bonne humeur.

Merci à tous mes collègues du laboratoire pour l'ambiance très agréable qui y règne. Un merci particulier à Cécile, Céline, Madalina, Nicolas pour leur soutien.

Merci à mes maîtres, Gérard Letac et Ole Barndorff-Nielsen, de m'avoir initié à la recherche.

Enfin, ce travail n'aurait pas pu s'accomplir sans un soutien familial sans faille. Merci à Marie-Laure d'assurer admirablement le quotidien lors de mes absences dues à la recherche, malgré sa vie professionnelle bien remplie. L'aide de mes beaux-parents a souvent été précieuse. Merci à mes filles Amandine et Océane qui, sans en être conscientes, constituent un formidable comité de soutien. Merci à mes parents qui, malgré la grande distance géographique, ne cessent de m'encourager.

Table des matières

Chapitre 1. Introduction : présentation générale des travaux 7
1. Familles exponentielles naturelles, probabilités de Lancaster 8
2. Caractérisations du type Matsumoto-Yor 10
3. Contributions à la caractérisation et à l'étude statistique des lois GIG 12
Publications 13

Chapitre 2. Familles exponentielles naturelles, probabilités de Lancaster 15
1. Caractérisation des familles exponentielles naturelles Poisson-gaussiennes par une propriété de stabilité par convolution 15
2. Construction de probabilités de Lancaster dont les marges appartiennent à la classe de Meixner multidimensionnelle 16

Chapitre 3. Caractérisations du type Matsumoto-Yor 19
1. La propriété de Matsumoto-Yor 19
2. Lien entre la propriété de Matsumoto-Yor et un réseau arborescent de résistances aléatoires 20
3. Autres propriétés d'indépendance : caractérisations des lois de Kummer et bêta généralisées 20

Chapitre 4. Contribution à la caractérisation et à l'étude statistique des lois GIG 29
1. Deux nouvelles caractérisations des lois GIG 29
2. Tests optimaux pour les paramètres dans les modèles GIG, basés sur la propriété ULAN 31

Chapitre 5. Projet de recherche 43
1. Travaux en cours 43
2. Perspectives de recherche 48

Bibliographie 53

CHAPITRE 1

Introduction : présentation générale des travaux

Ce mémoire synthétise les travaux de recherche non contenus dans ma thèse de doctorat. La recherche qui y est décrite relève de la théorie des probabilités, mais aussi de la statistique mathématique. Le fil conducteur de ces travaux est la caractérisation de (familles de) lois de probabilité. Les caractérisations de lois sont importantes, non seulement en théorie des probabilités et en statistique théorique où elles occasionnent la résolution de problèmes mathématiques souvent très beaux, mais aussi en statistique appliquée car ces caractérisations permettent bien souvent de développer des outils performants, soit dans le but d'estimer des paramètres à partir de l'observation d'un échantillon, soit dans la construction de tests statistiques. Les travaux relatés dans ce mémoire peuvent être scindés en trois parties.

Une première partie, concernant les travaux les plus anciens, porte sur deux thèmes : les familles exponentielles naturelles (FEN) et les probabilités dites *de Lancaster* sur $\mathbb{R}^d$.

La deuxième partie et la troisième partie concernent des travaux plus récents. La deuxième comporte des résultats autour de la propriété dite de*Matsumoto-Yor*, originellement associée aux lois gaussiennes inverses généralisées (GIG), que nous étendons à d'autres familles de lois : *lois de Kummer* et *lois bêta généralisées*, établissant ainsi une nouvelle caractérisation de ces lois, sous des hypothèses de régularité.

Enfin, les travaux mentionnés dans la troisième partie portent sur une revue de la littérature concernant les caractérisations connues des lois GIG, assortie de deux nouvelles caractérisations (nouvelles mais découlant directement de résultats connus sur des densités plus générales) et une étude statistique de ces lois. Cette étude statistique consiste d'abord à observer que les modèles paramétriques GIG ont la propriété dite "ULAN" (normalité asymptotique locale uniforme), ce qui nous permet ensuite d'utiliser la *méthodologie de Le Cam* pour proposer une nouvelle procédure de tests statistiques pour les paramètres des lois GIG.

Dans ce chapitre introductif, nous présentons rapidement chacune des trois parties et donnons la liste des publications. Les quatre premiers articles de cette liste sont liés à la thèse de doctorat et, par conséquent, leur contenu n'est pas décrit dans cette synthèse. Les chapitres 2, 3 et 4 reviennent plus en détail sur chacune des trois parties. Le chapitre 5 mentionne brièvement mes travaux en cours ainsi que quelques perspectives de recherche.

1. Familles exponentielles naturelles, probabilités de Lancaster

Les familles exponentielles jouent un rôle important en statistique car de nombreux problèmes statistiques trouvent un traitement unifié dans ce cadre (voir Barndorff-Nielsen (1978) pour les familles exponentielles générales et Letac (1992) pour les familles exponentielles naturelles). Elles sont souvent utiles en statistique bayésienne (voir, par exemple, Diaconis et Ylvisaker, 1979). Pour faciliter la lecture du document, nous donnons quelques définitions.

Soit μ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^d$, non concentrée sur un hyperplan. Soit

$$L_\mu(\theta) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(< \theta, x >)\mu(dx)$$

sa transformée de Laplace, $\Theta(\mu)$ l'intérieur du domaine convexe $\{\theta \in \mathbb{R}^d;\, L_\mu(\theta) < \infty\}$. Pour $\theta \in \Theta(\mu)$, soit $k_\mu(\theta) = \log L_\mu(\theta)$ et $P(\theta, \mu)$ la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ de densité $\exp(< \theta, x >)$ par rapport à μ.

On appelle *famille exponentielle naturelle engendrée par* μ, l'ensemble de mesures de probabilité $\{P(\theta, \mu);\, \theta \in \Theta(\mu)\}$.

La fonction k_μ est strictement convexe, analytique réelle, et son gradient k'_μ définit un difféomorphisme de $\Theta(\mu)$ sur un ouvert M_F de $\mathbb{R}^d$. Sa fonction réciproque est notée ψ_μ, et pour $m \in M_F$, on note

$$P(m, F) := P(\psi_\mu(m),\, \mu).$$

Puisque $k'_\mu(\theta)$ est l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X suivant la loi $P(\theta, \mu)$, M_F est aussi appelé *domaine des moyennes* de la FEN F.

Pour tout $m \in M_F$, la matrice de covariance de $P(m, F)$ est notée $V_F(m)$ et l'application $V_F : M_F \mapsto \mathcal{M}^+$, où $\mathcal{M}^+$ désigne l'ensemble des matrices définies positives, est appelée la *fonction variance* de F. Elle caractérise la famille F (par exemple, V_F est constante égale à Σ si et seulement si F est la famille des lois normales de matrice de covariance Σ). Ainsi, de nombreux résultats, notamment en termes de classification, concernant les FEN, reposent sur la forme de la matrice $V_F(m)$.

La FEN F est dite *quadratique* (voir Morris, 1982 pour le cas unidimensionnel et Casalis, 1996 pour le cas multidimensionnel) si chaque entrée de la matrice $V_F(m)$ est un polynôme du second degré en les composantes $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de m. Elle est dite *quadratique simple* si le terme du second degré dans l'entrée (i, j) de $V_F(m)$ est égal à am_im_j, où a est une constante ne dépendant pas de (i, j).

En collaboration avec D. Pommeret, nous avons obtenu le résultat suivant (article [KP2]) : si le produit de convolution de plusieurs FEN sur $\mathbb{R}^d$ est encore une FEN, alors cette dernière a une fonction variance affine, ainsi que chacune des familles intervenant dans la convolution. Chacune de ces dernières est alors une famille Poisson-gaussienne sur $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire le produit tensoriel de k familles normales sur $\mathbb{R}$ et de $d-k$ familles de lois de Poisson. Cela constitue une extension non triviale à $\mathbb{R}^d$ d'un résultat de Letac (1992) sur $\mathbb{R}$ pour la convolution de deux familles et de Pommeret (1999) pour la convolution de plus de deux familles. La démonstration repose en partie sur des résultats établis dans ma thèse sur la projection de FEN.

Une autre partie de mes travaux de recherche porte sur une classe de lois introduite par Lancaster en 1975 et que nous avons dénommée la classe des *probabilités de Lancaster*. En voici la définition. Soit σ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, de marges respectives μ et ν (sur $\mathbb{R}^d$). Soient $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^d}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^d}$ des polynômes orhogonaux par rapport à μ et ν, formant une base de $L^2(\mu)$ et $L^2(\nu)$ respectivement. La mesure σ est appelée probabilité de Lancaster si l'on a la propriété de bi-orthogonalité suivante : si (X, Y) est une variable aléatoire de loi σ, alors $\mathbb{E}(P_n(X)Q_k(Y)) = 0$ pour $n \neq k$.
On rencontre ce type de loi dans de nombreux domaines des probabilités et de la statistique. Par exemple, on les trouve dans la littérature concernant les processus de Markov stationnaires : Bussgang (1952), Barrett et Lampard (1955), Brown (1958), Wong et Thomas (1962), Wong (1963), etc., et aussi en analyse canonique (cf Dauxois et Pousse, 1975, Buja, 1990). Mentionnons aussi quelques références plus récentes : Griffiths (2009) sur les processus de Markov réversibles dont les fonctions propres sont des polynômes orthogonaux ; Diaconis, Khare et Saloff-Coste (2008) où de nouvelles techniques sont proposées pour calculer des vitesses de convergence vers la mesure stationnaire dans le cadre de l'échantillonnage de Gibbs bivariée et où il est montré que ces techniques donnent de très bons résultats si les mesures cibles sont des probabilités de Lancaster ; dans le domaine des probabilités discrètes, on peut citer Diaconis et Griffiths (2012) qui donne une interprétation des probabilités de Lancaster de marges binomiales à l'aide du modèle

d'urnes d'Ehrenfest généralisé ; Griffiths et Spano (2013) dans le cas des mesures de Dirichlet.
Une partie importante de la thèse de doctorat avait été consacrée à une étude générale de ces probabilités de Lancaster et à leur caractérisation dans plusieurs cas intéressants. Notre apport post-thèse à ce sujet et à celui des familles exponentielles naturelles multidimensionnelles a été, en collaboration avec D. Pommeret (article [KP1]), de démontrer que si les marges appartiennent à une famille exponentielle quadratique (voir la définition plus haut), alors on peut construire très simplement des probabilités de Lancaster sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, suivant une méthode déjà expérimentée dans $\mathbb{R}$ par Lancaster (1975), mais dont la généralisation à $\mathbb{R}^d$ ne relève pas d'une simple réécriture.

2. Caractérisations du type Matsumoto-Yor

Pour $\mu \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, la loi gaussienne inverse généralisée $\mathrm{GIG}(\mu, a, b)$ est la mesure de probabilité dont la densité est proportionnelle à

$$x^{\mu-1} e^{-\frac{1}{2}(a^2/x + b^2 x)} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x). \tag{1}$$

Pour $\mu, c > 0$, notons $\gamma(\mu, c)$ la loi gamma de densité proportionnelle à $x^{\mu-1} e^{-cx} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$.

Soient X et Y des variables aléatoires positives et indépendantes. Soit $f :]0, \infty[\to]0, \infty[$ une fonction strictement décroissante et bijective. Considérons $U := f(X+Y)$ et $V := f(X) - f(X+Y)$. Dans le cas $f(x) = 1/x$, si X suit la loi $\mathrm{GIG}(-\mu, a, b)$ et si Y suit la loi gamma $\gamma(\mu, b^2/2)$ avec $\mu, a, b > 0$, alors U et V sont indépendantes. Ce fait, observé par Matsumoto & Yor (2001) dans le cas $a = b$ au détour d'un lemme utile dans l'étude de certaines fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien, a été établi pour a et b quelconques par Letac & Wesołowski (2000) et est appelé dans la littérature récente *propriété de Matsumoto-Yor*. Il est prouvé dans Letac & Wesołowski (2000) que cette propriété caractérise le produit tensoriel des lois GIG et gamma :

Si X et Y sont des variables aléatoires positives et indépendantes, non dégénérées, alors les variables aléatoires $U = (X+Y)^{-1}$ et $V = X^{-1} - (X+Y)^{-1}$ sont indépendantes si et seulement s'il existe $\mu > 0$, $a > 0$ et $b > 0$ tels que $X \sim \mathrm{GIG}(-\mu, a, b)$ et $Y \sim \gamma(\mu, b^2/2)$.

Une extension de ce résultat de caractérisation a été établie par Wesołowski (2002b), remplaçant l'hypothèse d'indépendance de U et V par l'hypothèse de constance des espérances conditionnelles $\mathbb{E}(V|U)$ et $\mathbb{E}(1/V|U)$, le prix à payer étant de supposer l'existence de $E(1/X)$ (voir aussi Seshadri et Wesołowski, 2001).

On trouve une interprétation de cette propriété d'indépendance dans Matsumoto et Yor (2003) en termes du mouvement brownien. Dans le cas $\mu = -1/2$, cette interprétation repose sur le fait que les lois $\mathrm{GIG}(-1/2, a, b)$ et $\mathrm{GIG}(1/2, a, b)$ sont respectivement les lois du premier et du dernier temps d'atteinte du niveau $a > 0$ par un brownien standard de drift $b > 0$ partant de 0 (voir par exemple Vallois, 1991).

Notre contribution à la littérature concernant la propriété de Matsumoto -Yor a été, d'abord, de remarquer (article [K3]), que dans le cas $\mu = -1/2$, cette propriété peut être obtenue comme une conséquence d'un résultat d'indépendance établi en collaboration avec Barndorff-Nielsen (article [BK2]) pour un arbre muni de résistances aléatoires suivant la loi gaussienne inverse.

Un apport plus important à cette littérature a été d'étendre la propriété de Matsumoto-Yor à d'autres fonctions f et à d'autres lois, établissant ainsi de nouvelles propriétés d'indépendance et de nouvelles caractérisations. Plus précisément, nous nous sommes posé les questions suivantes :
Pour une fonction décroissante et bijective $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, soit la transformation

$$T_f : (0, \infty)^2 \to (0, \infty)^2$$

$$(x, y) \mapsto (f(x + y),\ f(x) - f(x + y)).$$

- Existe-t-il d'autres fonctions f que $x \mapsto 1/x$ telles que T_f préserve l'indépendance de variables aléatoires X et Y ?
- Peut-on trouver toutes ces fonctions f ?
- Pour chaque f, quelles sont les lois de X et Y ?

Malheureusement, nous n'avons pas pu répondre à ces questions sans restriction. Nous avons supposé que les lois des variables X et Y ont des densités de classe C^2 et nous avons fait des hypothèses de régularité sur f (que nous détaillerons plus loin). Sous ces hypothèses, nous avons établi dans [KV2], que les fonctions f possibles sont essentiellement au nombre de quatre :

$$f(x) = 1/x,\ f(x) = 1/(e^x - 1),\ f(x) = \log(1 + 1/x)$$

$$\text{ou } f(x) = \log((e^x + \delta - 1)/(e^x - 1)),\ \delta > 0.$$

Dans chacun de ces quatre cas, nous avons exhibé les lois des variables X et Y : dans le premier cas on retrouve bien sûr les lois GIG et gamma ; les deuxième et troisième cas fournissent une caractérisation des lois de Kummer, et le quatrième cas une caractérisation des lois bêta généralisées.

Dans un travail ultérieur (article [KV1], paru avant son prédécesseur [KV2]), les hypothèses de régularité sur les densités ont été considérablement assouplies : on suppose simplement que les logarithmes des densités sont localement intégrables (hypothèse plus faible, bien entendu, que la continuité même de ces densités). Mais cela reste insatisfaisant, car il est très vraisemblable que les caractérisations obtenues restent valables sous la simple hypothèse que les lois de X et Y ne sont pas des masses de Dirac, comme dans le théorème de Letac et Wesołowski (2000) concernant les lois GIG et gamma.

Nous avons établi dans l'article [K4] une version matricielle de la propriété d'indépendance évoquée ci-dessus pour les lois de Kummer. Il est vraisemblable que cela se traduise aussi par une caractérisation des lois de Kummer matricielles. Cela pourrait donner une ouverture sur le champs des matrices aléatoires, notamment sur une étude spectrale des matrices de Kummer.

3. Contributions à la caractérisation et à l'étude statistique des lois GIG

L'article[KL2] contient une revue des caractérisations connues des lois GIG, ainsi que deux nouvelles caractérisations qui résultent de l'application aux lois GIG de résultats plus généraux obtenus par ailleurs par Christophe Ley et ses coauteurs.

Dans l'article [KL1], plus novateur, nous proposons des tests optimaux des paramètres des modèles GIG. Dans cet article nous adoptons une autre paramétrisation des lois GIG que celle donnée en (1). Pour $p \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, nous notons $\mathrm{GIG}(p, a, b)$ la mesure de probabilité de densité

$$f_{p,a,b}(x) := c(p, a, b)x^{p-1}e^{-(ax+b/x)/2}, \quad x > 0, \tag{2}$$

où la constante de normalisation est $c(p, a, b) := \frac{(a/b)^{p/2}}{2K_p(\sqrt{ab})}$, K_p étant la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce.

Ces lois interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes réels, notamment des temps d'attente (Jørgensen, 1982), des phénomènes extrêmes en hydrologie (Chebana *et al*, 2010), l'activité neuronale (Iyengar *et al*, 1997). Concernant l'étude des propriétés statistiques de cette loi, on peut citer par exemple (Jørgensen, 1982), Perreault *et al* 1999a, 1999b).

Au sein de la famille des lois GIG, aussi appelée "famille de Halphen", on note deux modèles importants : la loi *gaussienne inverse* (IG) pour $p = -\frac{1}{2}$ et la loi *gaussienne inverse réciproque* (RIG) pour $p = \frac{1}{2}$.

Un problème naturel est celui de tester les modèles IG ou RIG parmi les lois GIG, c'est-à-dire de considérer les deux hypothèses nulles $\mathcal{H}_0^{\pm} : p = \pm\frac{1}{2}$ contre des alternatives de la forme $\mathcal{H}_1^{\pm} : p \neq \pm\frac{1}{2}$ ou, plus généralement, $\mathcal{H}_0^{\pm} : p = p_0$ contre $\mathcal{H}_1^{\pm} : p \neq p_0$. La manière standard d'aborder cette question est d'utiliser un test de rapport de vraisemblance. Le triplet (p, a, b) doit être estimé par la méthode du maximum de vraisemblance pour les densités (2). Il n'y a pas d'expression explicite d'un tel estimateur, et des méthodes numériques sont nécessaires. Ainsi, l'efficacité des statistiques de test du rapport de vraisemblance obtenues est réduite par la complexité numérique et la non exactitude des expressions.

En collaboration avec Christophe Ley, nous observons que les modèles GIG ont la propriété ULAN (*uniform local asymptotic normality*). L'intérêt de cette propriété ULAN pour les GIG est qu'elle constitue un outil clé dans la méthodologie de Le Cam (voir par exemple Le Cam et Yang, 1990, et Le Cam, 1960). L'idée centrale de la théorie de Le Cam est le concept de convergence de modèles statistiques, qui permet d'approcher une famille de mesures de probabilité par une autre famille plus simple à étudier. L'ingrédient majeur est la propriété ULAN qui implique que le modèle paramétrique $\mathcal{P}_{GIG}^{(n)}$ (loi conjointe de n copies iid d'une variable de loi GIG(p, a, b)), est localement (dans un voisinage de (p, a, b)) et asymptotiquement (pour des échantillons de grande taille) équivalent à un simple modèle gaussien. Cela nous a permis de construire un test optimal pour l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0 : p = p_0$ contre $\mathcal{H}_1 : p \neq p_0$, qui utilise uniquement l'expression explicite des estimateurs des moments (qui sont aussi les estimateurs du maximum de vraisemblance dans le cas $p_0 = \frac{1}{2}$) des paramètres a et b sous $p = p_0$, et qui est aussi efficace que le test du rapport de vraisemblance. Le test que nous proposons a l'avantage de combiner la performance issue de la procédure de maximum de vraisemblance, et la simplicité résultant de l'utilisation de la méthode des moments pour l'estimation des paramètres.

Publications

BK1 Barndorff-Nielsen, O. E. and Koudou, A. E. (1995). Cuts in natural exponential families. *Theory of Probability and Its Applications,* **40**, 220-229.

K1 Koudou, A. E. (1996). Probabilités de Lancaster. *Expo. Math,* **14**, 247-275.

BK2 Barndorff-Nielsen, O. E. and Koudou, A. E. (1998). Tree networks with random conductivity and the (reciprocal) inverse

Gaussian distribution. *Advances in Applied Probability,* **30**, 409-424.

K2 Koudou, A. E. (1998). Lancaster bivariate probability distributions with Poisson, negative binomial and gamma margins. *Test,* **7**, 95-110.

KP1 Koudou, A. E. and Pommeret, D. (2000) A construction of Lancaster probabilities with margins in the multidimensional Meixner class. *Australian & New-Zealand J. of Statistics* **42**, 59-66.

KP2 Koudou, A. E. and Pommeret, D. (2002) A characterization of Poisson-Gaussian families by convolution-stability. *Journal of Multivariate Analysis* **81**, 120-127.

K3 Koudou, A. E. (2006). A link between the Matsumoto-Yor property and an independence property on trees. *Stat. and Probab. Letters* **76**, 1097-1101.

KV1 Koudou, A. E. and Vallois, P. (2011). Which distributions have the Matsumoto-Yor property ? *Electronic Communications in Probability*, **16**, 556-566 .

KV2 Koudou, A. E. and Vallois, P. (2012). Some independence properties of the Matsumoto-Yor type. *Bernoulli* **18**(1), 119-136.

K4 Koudou, A. E. (2012). A Matsumoto-Yor property for Kummer and Wishart random matrices. *Stat. and Probab. Letters* **82**, 1903-1907.

KL1 Koudou, A. E. and Ley, C. (2014). Efficiency combined with simplicity : new testing procedures for Generalized Inverse Gaussian models. *Test* **23**, 708–724.

KL2 Koudou, A. E. and Ley, C. (2014). Characterizations of GIG laws : a survey. *Probab. Surv.* **11**, 161-176.

CHAPITRE 2

Familles exponentielles naturelles, probabilités de Lancaster

1. Caractérisation des familles exponentielles naturelles Poisson-gaussiennes par une propriété de stabilité par convolution

Il existe plusieurs caractérisations des lois normales et de Poisson. Citons par exemple l'ouvrage de Bryc (1995) qui rassemble différentes caractérisations de ces lois. Une autre caractérisation de ces deux lois est proposée dans l'ouvrage de Letac (1992). L'auteur montre que si deux familles exponentielles naturelles sont stables par convolution alors ce sont les familles des lois de Poisson ou des lois normales. Nous avons généralisé ce résultat à plusieurs familles et en dimension supérieure. Pour cela nous considérons $F_1, \ldots, F_n$ $(n \geq 2)$ des familles exponentielles naturelles sur $\mathbb{R}^d$ et nous notons $*$ le produit de convolution. En collaboration avec D. Pommeret ([KP2], nous avons obtenu le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Soient $F_1, \ldots, F_n$ $(n \geq 2)$ des familles exponentielles naturelles sur $\mathbb{R}^d$ engendrées par $\mu_1, \ldots, \mu_n$ respectivement. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *L'ensemble*

$$F_1 * F_2 * \ldots * F_n := \{\mu_1 * \mu_2 * \ldots * \mu_n; (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n\}$$

est une famille exponentielle naturelle (sur $\mathbb{R}^d$).

(2) *F_i est une famille Poisson-gaussienne pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et il existe une application linéaire B, indépendante de i, de $\mathbb{R}^d$ dans l'ensemble des matrices symétriques $d \times d$, et $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{S}_d$ tels que*

$$V_{F_i}(m_i) = B(m_i) + c_i$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$ et pour tout $m_i \in M_{F_i}$.

(3) *$F_1 * F_2 * \ldots * F_n$ est une famille Poisson-gaussienne.*

(4) *$F_{i_1} * F_{i_2} * \ldots * F_{i_k}$ est une famille Poisson-gaussienne. pour tout $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$.*

(5) $F_{i_1} * F_{i_2} * \ldots * F_{i_k}$ *est une famille exponentielle naturelle pour tout* $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$.

2. Construction de probabilités de Lancaster dont les marges appartiennent à la classe de Meixner multidimensionnelle

Soit $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des mesures de Radon positives μ sur $\mathbb{R}^d$, non concentrées sur un hyperplan, et dont la transformée de Laplace L_μ est définie sur un domaine dont l'intérieur $\Theta(\mu)$ contient 0 (cette dernière hypothèse assure l'existence des moments de tous ordres). Pour $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, soit F la famille exponentielle naturelle (FEN) engendrée par μ, et soit $V_F : M_F \mapsto \mathcal{M}^+$ la fonction variance de F, où $\mathcal{M}^+$ désigne l'ensemble des matrices définies positives.

Comme rappelé précédemment, la famille exponentielle naturelle F est dite *quadratique* si chaque entrée de la matrice $V_F(m)$ est un polynôme du second degré en les composantes $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de m. Elle est dite *quadratique simple* si le terme du second degré dans l'entrée (i,j) de $V_F(m)$ est égal à am_im_j, où a est une constante ne dépendant pas de (i,j).

Meixner (1934) a caractérisé la classe des lois de probabilité sur $\mathbb{R}$ telles que les polynômes orthogonaux associés ont une fonction génératrice exponentielle, c'est-à-dire

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n P_n(x)}{n!} = \exp(a(z)x)\, b(z),$$

où a et b sont des fonctions analytiques. Cette classe de mesures contient six familles décrites par Morris (1982) comme étant les seules familles exponentielles ayant une fonction variance quadratique : les familles normale, Poisson, gamma, binomiale, négative binomiale et hyperbolique.

Pour étendre à $\mathbb{R}^d$ la définition de la classe de Meixner, nous donnons la définition suivante : une famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^d}$ constituant une base de l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}^d$ est appelée *suite polynomiale* si, pour chaque $n = (n_1, \ldots, n_d)$, P_n est de degré $|n| = n_1 + \ldots n_d$, c'est-à-dire si l'on a

$$P_n(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{q\in\mathbb{N}^d, |q|\leq|n|} \alpha_q x_1^{q_1} \ldots x_d^{q_d},$$

où au moins un des nombres réels α_q est non nul quand $|q| = |n|$. On dit qu'une suite polynomiale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^d}$ a une fonction génératrice exponentielle s'il existe un voisinage B de 0 et deux fonctions analytiques

$a : B \to \mathbb{R}^d$ et $b : B \to \mathbb{R}$ tels que pour tout $z \in B$,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^d} \frac{z^n}{n!} P_n(x) = \exp\left(\langle a(z), x\rangle\right) b(z),$$

où $z^n = z_1^{n_1} \dots z_d^{n_d}$ et $n! = n_1! \dots n_d!$.

Nous définissons maintenant la classe de Meixner multidimensionnelle.

Définition 2.1. *Une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ appartient à la classe de Meixner multidimensionnelle si elle a des moments de tous ordres et s'il existe une suite polynomiale orthogonale par rapport à μ et ayant une fonction génératrice exponentielle.*

Définition 2.2. *Etant donné deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de lois respectives μ et ν, on dit que la loi jointe σ de (X, Y) est une probabilité de Lancaster s'il existe deux suites polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^d}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^d}$ telles que*

(1) *la famille (P_n) est μ-orthonormale ;*
(2) *la famille (Q_n) est ν-orthonormale ;*
(3) $\mathbb{E}(P_n(X)Q_k(Y)) = 0$ *si $n \neq k$.*

Définition 2.3. *Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ et L_μ sa transformée de Laplace. L'ensemble $\Lambda(\mu)$ des réels strictement positifs t tels que L_μ^t soit la transformée de Laplace d'une mesure positive est appelé ensemble de Jorgensen de μ (bien sûr, cet ensemble contient l'ensemble des entiers naturels non nuls puisque, pour tout $t \in \mathbb{N}$, L_μ^t est la transformée de Laplace de μ^{*t}, où $*$ désigne le produit de convolution ; il est égal à $(0, \infty)$ si μ est indéfiniment divisible).*

Notre résultat est le suivant (article [KP1]), généralisant à $\mathbb{R}^d$ Lancaster (1975).

Théorème 2.2. *Soient $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, m la moyenne de μ. Soient I et J des parties finies de $\Lambda(\mu)$, dont l'intersection K est non vide. Soit $(X_t)_{t\in I\cup J}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que X_t soit de loi μ^{*t}. Considérons*

$$X = \sum_{t\in I} X_t, \quad Y = \sum_{t\in J} X_t.$$

On suppose que la famille exponentielle naturelle F engendrée par μ est quadratique simple. Soit V_F sa fonction variance. Soit A une matrice inversible telle que $A^{-1}V_F(m)(A^{-1})'$ soit diagonale. Soit $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, $m \in M_F$, et $n \in \mathbb{N}^d$, soit $f_\mu^{(n)}(x, m)(Ae_1, \dots, Ae_d)$ la dérivée d'ordre $|n| = n_1 + \dots + n_d$ de $m \mapsto f_\mu(x, m)$ dans les $|n|$ directions Ae_1 (n_1 fois), …, Ae_d (n_d fois). Alors

- *La loi jointe* σ *de* (X,Y) *est une probabilité de Lancaster de marges* μ_α *et* μ_β*, où* $\alpha = \sum_{t\in I} t$ *et* $\beta = \sum_{t\in J} t$.
- *Les suites polynomiales orthonormales* (P_n) *et* (Q_n) *correspondantes sont obtenues par normalisation des polynômes* $\alpha^{|n|} f^{(n)}_{\mu_\alpha}(x,m)(Ae_1,\dots,Ae_d)$ *et* $\beta^{|n|} f^{(n)}_{\mu_\beta}(x,m)(Ae_1,\dots,Ae_d)$ *respectivement.*

CHAPITRE 3

Caractérisations du type Matsumoto-Yor

Rappelons que, pour $\mu \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, la loi GIG de paramètres μ, a, b est définie par :

$$GIG(\mu; a, b)(dx) = \left(\frac{b}{a}\right)^{\mu} \frac{x^{\mu-1}}{2K_\mu(ab)} e^{-\frac{1}{2}(a^2/x + b^2 x)} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) dx,$$

où K_μ est la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce, aussi appelée fonction de McDonald.

La valeur $a = 0$ est autorisée si $\mu > 0$, ainsi que $b = 0$ si $\mu < 0$. La loi GIG$(\mu, 0, b)$ est la loi gamma $\gamma(\mu, b^2/2)$ de densité

$$\frac{b^{2\mu}}{2^\mu \Gamma(\mu)} x^{\mu-1} \exp -\frac{b^2}{2} x \quad (x > 0).$$

Si $\mu = -\frac{1}{2}$, alors $GIG(\mu; a, b)$ est la loi gaussienne inverse classique :

$$IG(a, b)(dx) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{ab} x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(a^2 x^{-1} + b^2 x)} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) dx.$$

Si $\mu = \frac{1}{2}$, on a la *loi gaussienne inverse réciproque*

$$RIG(a, b)(dx) = \frac{b}{\sqrt{2\pi}} e^{ab} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(a^2 x^{-1} + b^2 x)} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) dx.$$

1. La propriété de Matsumoto-Yor

Cette propriété affirme l'indépendance des variables

$$U = \frac{1}{X+Y}, \quad V = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+Y}$$

si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes de lois respectives GIG$(-\mu, a, b)$ et $\gamma(\mu, b^2/2)$, avec $\mu > 0$, $a > 0$ et $b > 0$.

Le résultat suivant de Letac & Wesołowski (2000) offre une caractérisation du produit tensoriel GIG$(-\mu, a, b) \otimes \sim \gamma(\mu, b^2/2)$:

THÉORÈME 3.1. *(Letac & Wesołowski, 2000)*
Si X et Y sont des variables aléatoires positives et indépendantes, non dégénérées, alors les variables aléatoires $U = (X+Y)^{-1}$ et $V = X^{-1} - (X+Y)^{-1}$ sont indépendantes si et seulement s'il existe $\mu > 0$, $a > 0$ et $b > 0$ tels que $X \sim$ GIG$(-\mu, a, b)$ et $Y \sim \gamma(\mu, b^2/2)$.

Présentons maintenant les résultats que nous avons obtenus :

2. Lien entre la propriété de Matsumoto-Yor et un réseau arborescent de résistances aléatoires

Pour $\mu = -1/2$, la propriété de Matsumoto-Yor peut être obtenue comme une conséquence d'un résultat d'indépendance que nous avions obtenue avec Barndorff-Nielsen (voir [BK2]) sur un réseau électrique arborescent. Rappelons ce résultat :

THÉORÈME 3.2. *Soit un réseau électrique consistant en un arbre fini dont chaque arête e est munie d'une résistance aléatoire R_e indépendamment des autres arêtes. On suppose que*

- *si e est une arête terminale, alors $R_e \sim \mathrm{RIG}(a_e, b_e)$;*
- *si e n'est pas une arête terminale, alors $R_e \sim \mathrm{IG}(a_e, b_e)$;*
- *la somme des paramètres a_e pour toutes les arêtes d'un chemin reliant la racine à une feuille de l'arbre ne dépend pas du chemin ; soit a cette somme ;*
- *pour chaque arête e, $b_e = \sum_{e' \in F_e} b_{e'}$, où F_e est l'ensemble des arêtes terminales reliées à e.*

Alors la résistance équivalente du réseau suit la loi $RIG(a, b)$, où b est la somme des b_e pour toutes les arêtes terminales de l'arbre.
De plus, conditionnellement à la résistance équivalente R, les variables

$$U = \left(\sum_{e \in E} \frac{a_e^2}{R_e} \right) - \frac{a^2}{R}, \quad V = \left(\sum_{e \in E} b_e^2 R_e \right) - b^2 R$$

sont indépendantes.

En appliquant ce théorème à un arbre trivial formé de deux résistances mises en série, on obtient la propriété de Matsumoto-Yor dans le cas $\mu = -1/2$ (article [K3]).

3. Autres propriétés d'indépendance : caractérisations des lois de Kummer et bêta généralisées

En collaboration avec Pierre Vallois, nous avons établi des propriétés d'indépendance du même genre que celle de Matsumoto-Yor. A l'origine de ce travail se trouvait la question de savoir s'il existait d'autres fonctions f que $x \mapsto 1/x$ et d'autres lois μ_1 et μ_2 que les lois GIG et gamma, telles que si X et Y sont des variables aléatoires positives indépendantes de lois respectives μ_1 et μ_2 alors les variables aléatoires $U = (f(X+Y)$ et $V = f(X) - f(X+Y)$ sont indépendantes (nous qualifions ces fonctions de *fonctions de Matsumoto-Yor*). Nous avons résolu ce problème sous des hypothèses de régularité sur f et sur les lois μ_1 et μ_2. Voici les différents résultats obtenus.

3.1. Caractérisation des fonctions de Matsumoto-Yor sous des hypothèses de régularité. Considérons, pour $x > 0$,

$$f_1(x) = \frac{1}{e^x - 1}, \quad g_1(x) = f_1^{-1}(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

et

$$f_\delta(x) = \log\left(\frac{e^x + \delta - 1}{e^x - 1}\right), \quad \delta > 0.$$

Théorème 3.3. *(KV2) Sous des hypothèses de régularité, f est une fonction de Matsumoto-Yor si et seulement s'il existe $\alpha, \beta, \delta > 0$ tels que*

$$f(x) = \frac{\alpha}{x}, \quad f(x) = \frac{1}{\alpha} f_1(\beta x),$$

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} g_1(\beta x) \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{1}{\alpha} f_\delta(\beta x).$$

A noter qu'on obtient ainsi une classe de fonctions fermée par passage à la réciproque, puisque $g_1 = f_1^{-1}$ et que f_δ est involutive. La preuve de ce théorème comporte les étapes suivantes :

Proposition 3.1. *Soient $X, Y > 0$ des variables aléatoires positives, indépendantes, admettant des densités respectives p_X et p_Y strictement positives et deux fois dérivables. Soit $\phi_X = \log p_X$ et $\phi_Y = \log p_Y$. Soit une fonction décroissante $f : (0, \infty) \mapsto (0, \infty)$, trois fois dérivable.*
Alors les variables aléatoires $U = f(X + Y)$ et $V = f(X) - f(X + Y)$ sont indépendantes si, et seulement si, pour tous $x, y > 0$:

$$\phi_X''(x) - \phi_X'(x)\frac{f''(x)}{f'(x)} + \phi_Y''(y) f'(x)\left(\frac{1}{f'(x)} - \frac{1}{f'(x+y)}\right)$$
$$+\phi_Y'(y)\frac{f''(x)}{f'(x)} + \frac{2(f''(x))^2 - f'''(x)f'(x)}{f'(x)^2} = 0. \tag{3}$$

A partir de cette équation différentielle impliquant la fonction f et les densités des variables aléatoires X et Y, on a obtenu une équation où n'intervient que la fonction f, via $F = 1/f'$:

Proposition 3.2. *Soit f, X et Y comme dans la proposition précédente.*

Considérons $h := \phi'_Y$ *et* $F := 1/f'$. *Supposons que* $F(0) = 0$. *Alors il existe une fonction* λ *telle que, pour tous* $x, y > 0$:

$$\begin{aligned} F(x+y) &= \frac{F(y)[\lambda(x) - h(y)F'(x)]}{\lambda(0) - h(y)F'(0)} + F(x). \\ F'(x+y) &= \frac{F'(y) + F'(0)}{F(y)}[F(x+y) - F(x)] - F'(x) \qquad (4) \end{aligned}$$

Nous avons cherché les solutions F de cette dernière équation à travers leur développement en série. En effet, en posant $F(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$ dans l'équation, on obtient des relations de récurrence entre les coefficients. Ces relations sont données dans les deux lemmes suivants :

Lemme 3.1. *Soit* F *une fonction vérifiant (4) et suffisamment régulière pour admettre le développement* $F(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$. *Supposons* $F(0) = F'(0) = 0$. *Alors*

(1) *Pour tout* $k \geq 0$, $a_{2k+1} = 0$.

(2) *Pour tout* $k \geq 1$,

$$a_{2k} = \left(\frac{12a_4}{a_2}\right)^{k-1} \frac{2}{(2k)!} a_2.$$

Supposons $F(0) = 0$ *et* $F'(0) \neq 0$. *Alors*

(1) *Pour tout* $k \geq 0$,

$$a_{2k+1} = \left(\frac{6a_3}{a_1}\right)^{k} \frac{1}{(2k+1)!} a_1.$$

(2) *Pour tout* $k \geq 1$,

$$a_{2k} = \left(\frac{6a_3}{a_1}\right)^{k-1} \frac{2}{(2k)!} a_2.$$

Ce lemme permet d'obtenir les quatre types de fonctions $F = 1/f'$ possibles exhibés dans le théorème suivant, et d'en déduire les quatre types de fonctions f annoncés.

Théorème 3.4. *Supposons* $F(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n, \quad (x > 0)$.

(1) *Si* $F'(0_+) = 0$, *alors* $a_2 < 0$. *De plus, si* $a_4 < 0$, *alors*

$$F(x) = \frac{a_2^2}{6a_4}\left(\cosh\left(x\sqrt{\frac{12a_4}{a_2}}\right) - 1\right).$$

Sinon, $F(x) = a_2 x^2$.

(2) *Si $F'(0_+) \neq 0$ alors*
dans le cas où $a_1 a_3 > 0$, on a

$$F(x) = \frac{a_1 a_2}{3a_3}\left[\cosh\left(x\sqrt{\frac{6a_3}{a_1}}\right) - 1\right] + a_1\sqrt{\frac{a_1}{6a_3}}\sinh\left(x\sqrt{\frac{6a_3}{a_1}}\right).$$

Sinon, $F(x) = a_1 x + a_2 x^2$.

En remplaçant, dans l'équation (3), la fonction f successivement par chacune des quatre expressions obtenues, on obtient une équation différentielle vérifiée par les densités de X et Y. La résolution de cette équation, assez longue mais sans difficulté particulière, permet de donner, pour chaque type de fonction f, une propriété d'indépendance du type Matsumoto-Yor. Bien sûr, pour $f(x) = 1/x$, on retrouve la propriété de Matsumoto-Yor classique. Nous énonçons dans les théorèmes suivants, les autres propriétés d'indépendance obtenues.

3.2. Le cas $f = f_1$.

Définition 3.1. *La loi de Kummer de type 2 (voir par exemple Ng & Kotz, 1995) est la mesure de probabilité définie par :*

$$K^{(2)}(a,b,c)(dx) := \alpha(a,b,c)x^{a-1}(1+x)^{-a-b}e^{-cx}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)dx$$

où $a, c > 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $\alpha(a,b,c)$ est la constante de normalisation, qui s'exprime à l'aide de la fonction gamma et de la fonction hypergéométrique confluente de seconde espèce Ψ :

$$\alpha(a,b,c) = \frac{1}{\Gamma(a)\Psi(a,1-b,c)}.$$

Théorème 3.5. (1) *Considérons $X, Y > 0$, deux variables aléatoires positives indépendantes, admettant des densités strictement positives et deux fois dérivables. Les variables aléatoires U et V définies par*

$$U = \frac{1}{e^{X+Y}-1}, \quad V = \frac{1}{e^X - 1} - \frac{1}{e^{X+Y}-1}$$

sont indépendantes si, et seulement s'il existe des constantes a, b et c tels que

$$p_Y(y) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-e^{-y})^{b-1}e^{-ay}\mathbf{1}_{\{y>0\}} \tag{5}$$

$$p_X(x) = \alpha(a+b,c,-a)e^{-(a+b)x}(1-e^{-x})^{-b-1} \exp\left(-c\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)\mathbf{1}_{\{x>0\}} \tag{6}$$

(2) *Dans ces conditions, $U \sim K^{(2)}(a,b,c)$ et $V \sim \gamma(b,c)$.*

3.3. Le cas $f = g_1$. Nous obtenons ici une caractérisation de la loi de Kummer $K^{(2)}$ (ou, plus exactement, une caractérisation du produit tensoriel de cette loi et d'une loi gamma, avec des paramètres adéquats) par une propriété d'indépendance analogue à celle de Letac & Wesołowski (2000) concernant le produit tensoriel d'une loi GIG et d'une loi gamma.

THÉORÈME 3.6. *Considérons $U, V > 0$, deux variables aléatoires positives indépendantes, admettant des densités strictement positives et deux fois dérivables.*

Les variables aléatoires U' et V' définies par

$$U' = \frac{1 + \frac{1}{U+V}}{1 + \frac{1}{U}}, \quad V' = U + V$$

sont indépendantes si, et seulement s'il existe des constantes a, b, c telles que

$$U \sim K^{(2)}(a, b, c) \quad \text{et} \quad V \sim \gamma(b, c).$$

Dans ces conditions, $U' \sim \mathrm{Beta}(a, b)$ et $V' \sim K^{(2)}(a + b, -b, c)$.

REMARQUE 3.1. *On établit ainsi la propriété de convolution :*

$$K^{(2)}(a, b, c) * \gamma(b, c) = K^{(2)}(a + b, -b, c).$$

3.4. Le cas $f = f_\delta$. Considérons la loi bêta généralisée, définie pour $a, b, \alpha > 0$ et $c \in \mathbb{R}$ par

$$\beta_\alpha(a, b; c)(dx) = k_\alpha(a, b; c) x^{a-1}(1 - x)^{b-1}(1 + \alpha x)^c \mathbf{1}_{(0,1)}(x) dx,$$

où $k_\alpha(a, b; c)$ est la constante de normalisation. A noter que si $c = 0$ ou $\alpha = 0$, alors $\beta_\alpha(a, b; c) = \mathrm{Beta}(a, b)$.

THÉORÈME 3.7. *Soient $X, Y > 0$, deux variables aléatoires positives indépendantes, à valeurs dans $(0, 1)$, admettant des densités régulières au sens défini dans les théorèmes précédents. Considérons, pour $\delta > 0$ fixé,*

$$U = \frac{1 - XY}{1 + (\delta - 1)XY}, \quad V = \frac{1 - X}{1 + (\delta - 1)X} \frac{1 + (\delta - 1)XY}{1 - XY}.$$

U et V sont indépendantes si, et seulement s'il existe des constantes $a, b, \lambda > 0$ telles que

$$X \sim \beta_\delta(a + b, \lambda; -\lambda - b), \ Y \sim \mathrm{Beta}(a, b).$$

On a alors

$$U \sim \beta_\delta(\lambda + b, a; -a - b), \ V \sim \mathrm{Beta}(\lambda, b).$$

Remarque 3.2. *Dans ce théorème, nous avons adopté une formulation "multiplicative" des variables U et V, au lieu de la formulation "additive" $U = f(X+Y)$, $V = f(X) - f(X+Y)$.*

3.5. Relaxation des hypothèses de régularité. Rappelons que les résultats décrits ci-dessus ont été obtenus sous l'hypothèse que les variables aléatoires concernées avaient des densités deux fois dérivables. Ces hypothèses ont été allégées dans l'article [KV1], où nous supposons seulement que les logarithmes des densités sont localement intégrables. Notre approche s'inspire de Wesołowski (2002a). Dans cette partie nous donnons le résultat pour $f = f_1$ et renvoyons à l'article pour les autres cas.

Pour $X, Y > 0$, soient U et V définis par

$$(U, V) := \left(\frac{1}{e^{X+Y}-1}, \frac{1}{e^{X}-1} - \frac{1}{e^{X+Y}-1}\right). \tag{7}$$

Nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 3.8. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes et positives, de densités respectives p_X et p_Y. On suppose que p_X et p_Y sont strictement positives et que $\log p_X$ et $\log p_Y$ sont localement intégrables sur $]0, \infty[$.*
Si les variables U and V définies par (7) sont indépendantes, alors les densités respectives de X et Y sont données par (6) et (5). De plus, $U \sim K^{(2)}(a, b, c)$ et $V \sim \gamma(b, c)$.

La preuve repose sur la résolution de deux équations fonctionnelles reliant p_X, p_Y, p_U et p_V.

Lemme 3.2. *Avec les notations et hypothèses du théorème 3.8, définissons les fonctions $h := -\frac{p_X}{p_Y f'}$, $k := -\frac{p_U}{p_V g'}$, $F := \log k$, $\alpha := \log p_V$, $\beta := \log p_Y$ et $H(r) := \log\left(h\Big(\log\big(1 + \frac{2}{r}\big)\Big)\right)$, où $r > 0$. Alors on a les équations fonctionnelles suivantes :*

$$H(s) - H(t) = \alpha\left(\frac{s(s+2)}{2(s+t+2)}\right) - \alpha\left(\frac{t(t+2)}{2(s+t+2)}\right), \quad s,\, t > 0. \tag{8}$$

$$F(u) - F(v) = \beta\big(g(u) - g(u+v)\big) - \beta\big(g(v) - g(u+v)\big), \quad u,\, v > 0. \tag{9}$$

Ce lemme s'obtient par une manipulation des deux équations suivantes résultant de l'indépendance des variables X et Y d'une part, et de U et V d'autre part :

$$p_U(u)p_V(v) = p_X(g(u+v))\, p_Y(g(u) - g(u+v))\, g'(u+v)g'(u),$$

%beginequation
$p_X(z)p_Y(w) = p_U(f(z{+}w))\, p_V(f(z){-}f(z{+}w))\, f'(z{+}w)f'(z), \quad z, w > 0.$

Une fois les équations fonctionnelles (8) et (9) établies, on utilise le lemme suivant :

LEMME 3.3. *Les fonctions H, α, F and β sont de classe C^1.*

Ce lemme est un corollaire du résultat général suivant :

LEMME 3.4. *Soit $\xi :]0, \infty[\to]0, \infty[$ une bijection de classe C^1 telle que $\xi'(x) < 0$. Soit $\phi = (\phi_1, \phi_2) : (0, \infty)^2 \to (0, \infty)^2$ définie par*

$$\phi(u, v) := \big(\xi(u) - \xi(u + v),\ \xi(v) - \xi(u + v)\big).$$

On suppose que le jacobien $J_\phi(u, v)$ est non nul pour tout $u, v > 0$ et que

$$G(s) - G(t) = \theta\big(\phi_1(s, t)\big) - \theta\big(\phi_2(s, t)\big), \quad s, t > 0,$$

où l'une des fonctions θ et $G : (0, \infty) \to (0, \infty)$ est localement intégrable sur $(0, \infty)$.
Alors G et θ sont de classe C^1.

Nous renvoyons à l'article KV1 pour les détails.

3.6. Extension partielle du théorème 3.6 aux matrices aléatoires de Kummer. Rappelons une des propriétés d'indépendance décrites ci-dessus :
Si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes telles que X suit la loi de Kummer

$$K^{(2)}(a, b, c)(dx) := Cx^{a-1}(1 + x)^{-a-b}e^{-cx}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)dx,\ a, c > 0,\ b \in \mathbb{R}$$

(C étant la constante de normalisation) et Y suit la loi gamma $\gamma(b, c)(dx)$, alors les variables aléatoires

$$U := \frac{1 + \frac{1}{X+Y}}{1 + \frac{1}{X}}, \quad V := X + Y \tag{10}$$

sont indépendantes. De plus, $U \sim \mathrm{beta}(a, b)$ et $V \sim K^{(2)}(a + b, -b, c)$ où $\mathrm{beta}(a, b)(dx) = \dfrac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1 - x)^{b-1}\mathbf{1}_{\{0<x<1\}}dx$.

La loi de Kummer et la loi gamma peuvent être définies sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives (dans la cas gamma, c'est la loi de Wishart). Par ailleurs, des versions matricielles existent pour la propriété de Matsumoto-Yor concernant les lois GIG et gamma (Letac & Wesołowski (2000), Massam & Wesołowski (2006)). Il est alors naturel de se demander si l'indépendance des variables aléatoires U et V définies par (10) est encore vérifiée si X et Y sont des matrices aléatoires $r \times r$ définies positives (bien-sûr, U et V doivent être réécrites en tant que matrices, cf (11)). Nous répondons à cette question par l'affirmative. Même si la preuve repose uniquement sur un calcul de jacobien, le contexte matriciel la rend non triviale.

Avant d'énoncer le résultat, rappelons la définition des lois de Kummer, de Wishart et beta pour des variables matricielles.

Soit $\mathcal{M}_r$ l'espace euclidien des matrices réelles symétriques et soit I l'élément unité de $\mathcal{M}_r$. Considérons le produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$ sur $\mathcal{M}_r$. Désignons par $\mathcal{M}_r^+$ le cône des matrices définies positives de $\mathcal{M}_r$.

Pour $\Sigma \in \mathcal{M}_r^+$ et $b \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{r-1}{2}\} \cup (\frac{r-1}{2}, \infty)$, la loi de Wishart $\gamma(b, \Sigma)$ (voir par exemple Letac & Wesołowski (2000), Massam & Wesołowski, 2006) est définie comme la loi d'une matrice aléatoire Y prenant ses valeurs dans la fermeture de $\mathcal{M}_r^+$ et dont la transformée de Laplace est

$$\mathbb{E}(e^{\langle \sigma, Y\rangle}) = \left(\frac{\det \Sigma}{\det(\Sigma - \sigma)}\right)^b, \quad \Sigma - \sigma \in \mathcal{M}_r^+.$$

Si $b > \frac{r-1}{2}$, la loi de Wishart $\gamma(b, \Sigma)$ a pour densité :

$$\gamma(b, \Sigma)(dy) = \frac{(\det \Sigma)^b}{\Gamma_r(b)} (\det y)^{b-(r+1)/2} \exp(-\langle \Sigma, y\rangle) \mathbf{1}_{\mathcal{M}_r^+}(y)\, dy,$$

où Γ_r est la fonction gamma multivariée, définie pour tout nombre complexe z vérifiant $\mathrm{Re}(z) > (r-1)/2$, par $\Gamma_r(z) = \pi^{r(r-1)/4} \displaystyle\prod_{j=1}^{r} \Gamma\left(z - \frac{j-1}{2}\right)$.

Pour $\alpha, \beta > \frac{r-1}{2}$, la loi beta $\mathrm{beta}(\alpha, \beta)$ (aussi appelée loi beta matricielle de type I, cf Nagar & Gupta, 2002) sur $\mathcal{M}_r^+$ est

$$\mathrm{beta}(\alpha, \beta)(du) = \frac{\Gamma_r(\alpha+\beta)}{\Gamma_r(\alpha)\Gamma_r(\beta)} (\det u)^{\alpha - \frac{r+1}{2}} (\det(I-u))^{\beta - \frac{r+1}{2}} \mathbf{1}_{\mathcal{U}}(u)\, du,$$

où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des matrices u de $\mathcal{M}_r^+$ telles que $I - u \in \mathcal{M}_r^+$.

Pour $a > \frac{r-1}{2}$, $b \in \mathbb{R}$, $\Sigma \in \mathcal{M}_r^+$, la loi de Kummer matricielle sur $\mathcal{M}_r^+$ est définie par

$$\begin{aligned} K(a, b, \Sigma)(dx) &= \frac{1}{\Gamma_r(a)\psi(a, a-b+\frac{r+1}{2}; \Sigma)} \\ &\quad \times (\det x)^{a - \frac{r+1}{2}} (\det(I+x))^b \exp(-\langle \Sigma, x\rangle) \mathbf{1}_{\mathcal{M}_r^+}(x)\, dx, \end{aligned}$$

où ψ est la fonction hypergeométrique confluente de deuxième espèce à argument matriciel (cf Joshi & Joshi, 1985, formule (2)). Cette distribution est appelée dans la littérature (cf Gupta *et al*, 2001) la loi

Kummer-Gamma ou la *loi de Kummer de type II*. Par souci de concision, nous l'appellerons simplement *loi de Kummer*.

Nous énonçons à présent le résultat.

THÉORÈME 3.9. *Soient a, b, Σ tels que $a > \frac{r-1}{2}$, $b - a > \frac{r-1}{2}$ et $\Sigma \in \mathcal{M}_r^+$. Soient X et Y des matrices aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathcal{M}_r^+$, telles que X suit la loi de Kummer $K(a, b, \Sigma)$ et Y la loi de Wishart $\gamma(b - a, \Sigma)$.*
Alors les matrices aléatoires

$$(11)\quad U := [I+(X+Y)^{-1}]^{1/2}[I+X^{-1}]^{-1}[I+(X+Y)^{-1}]^{1/2}, \quad V := X+Y$$

sont indépendantes. De plus, $U \sim \mathrm{beta}(a, b-a)$ et $V \sim K(b, a, \Sigma)$.

La preuve du théorème repose sur le calcul du jacobien de la transformation

$$T : \mathcal{M}_r^+ \times \mathcal{M}_r^+ \to \mathcal{U} \times \mathcal{M}_r^+$$
$$(x, y) \mapsto \left([I + (x + y)^{-1}]^{1/2}[I + x^{-1}]^{-1}[I + (x + y)^{-1}]^{1/2},\ x + y\right).$$

Questions

(1) On peut faire la conjecture suivante, que nous avons démontrée dans le cas $r = 1$: *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathcal{M}_r^+$ ayant des densités régulières. Les matrices aléatoires U et V définies ci-dessus sont indépendantes si et seulement s'il existe a, b, Σ telles que $a > \frac{r-1}{2}$, $b - a > \frac{r-1}{2}$, $\Sigma \in \mathcal{M}_r^+$ et telles que X suit la loi de Kummer $K(a, b, \Sigma)$ et Y la loi de Wishart $\gamma(b - a, \Sigma)$.*

(2) La propriété de Matsumoto-Yor a été remarquée par Matsumoto et Yor (2001) au cours de leur étude de certaines fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien. Il est alors naturel de se demander s'il existe un processus stochastique dont le comportement serait lié à la propriété d'indépendance établie pour la loi de Kummer, aussi bien dans le cas réel que dans le cas matriciel.

CHAPITRE 4

Contribution à la caractérisation et à l'étude statistique des lois GIG

Nous présentons dans cette partie quelques résultats issus des articles [KL1] et [KL2]. L'article [KL2] est une revue de la littérature sur les caractérisations des lois GIG. On y propose deux nouvelles caractérisations, dont le caractère novateur est limité par le fait qu'elles constituent des corollaires de résultats déjà établis pour des densités plus généraux. Dans l'article [KL1] nous observons une propriété intéressante du modèle statistique GIG et exploitons cette propriété pour construire une nouvelle procédure de test sur les paramètres.

1. Deux nouvelles caractérisations des lois GIG

Nous proposons une revue succincte de la littérature concernant les diverses caractérisations de la loi gaussienne inverse généralisée (GIG) et donnons deux nouvelles caractérisations. La première est basée sur l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre d'échelle. La deuxième est une caractérisation de type Stein.

La densité de la loi GIG peut être exprimée (voir Jørgensen, 1982) à l'aide des paramètres $\theta = \sqrt{ab}$ (paramètre de concentration) et $\eta = \sqrt{b/a}$ (paramètre d'échelle) :

$$f_{p,\theta,\eta}(x) := \frac{1}{2\eta K_p(\theta)} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{p-1} e^{-\theta(x/\eta+\eta/x)/2}, \quad x > 0. \tag{12}$$

1.1. Une caractérisation par l'estimateur du maximum de vraisemblance. Un théorème célèbre de caractérisation en statistique, dû à Carl Friedrich Gauss (1809), se formule ainsi : la moyenne $\bar{X}$ est, pour tout échantillon i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ de toute taille n, l'estimateur de maximum de vraisemblance (EMV) du paramètre μ dans une famille de densités $\{f(x-\mu), \mu \in \mathbb{R}\}$ si et seulement si l'échantillon est tiré d'une population gaussienne (de variance non fixée). Ce tout premier résultat de caractérisation par EMV a des applications importantes, puisqu'il indique clairement que plus l'on s'éloigne de la situation gaussienne, moins la moyenne est pertinente comme estimateur. D'autres théorèmes de caractérisation ont été établis par le passé, reliant des formes particulières de l'estimateur du maximum de vraisemblance à une loi particulière, par exemple la loi exponentielle, (Poincaré, 1912, Teicher, 1961), la loi de Laplace (Kagan *et al*, 1973), la loi gamma (Marshall et Olkin, 1993) ou la loi harmonique (Hürlimann, 1998). Duerinckx *et al* (2013) effectue un inventaire de ces résultats et fournit une théorie unifiée.

Dans cette section, nous appliquons le résultat général de Duerinckx *et al.* (2013) pour construire un théorème de caractérisation par EMV de la loi GIG. Pour cela, nous adoptons la reformulation (12) de la densité, car cette paramétrisation fait de la famille $\{f_{p,\theta,\eta}(x),\, \eta > 0\}$ une famille d'échelle. Observons d'abord par un calcul simple que l'EMV de η, à p et θ fixés, est

$$\hat{\eta} = \frac{\sqrt{p^2 + \theta^2 \bar{X}\bar{X}_{-1}} - p}{\theta \bar{X}_{-1}},$$

où $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $\bar{X}_{-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}$ si $X_1, \ldots X_n$ sont i.i.d. de loi $\mathrm{GIG}(p,a,b)$. Nous obtenons le résultat suivant :

THÉORÈME 4.1. *Soit un entier $n \geq 3$. Pour $p \in \mathbb{R}$ et $\theta > 0$, $\frac{\sqrt{p^2+\theta^2\bar{X}\bar{X}_{-1}}-p}{\theta\bar{X}_{-1}}$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre d'échelle η dans une famille $\left\{\frac{1}{\eta}f(x/\eta), \eta > 0\right\}$ sur $(0,\infty)$ pour tout échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de taille fixée n si et seulement s'il existe $d > 0$ tel que la famille soit $\{f_{pd,\theta d,\eta}(x),\, \eta > 0\}$, i.e. la famille des densités des lois* $\mathrm{GIG}(pd, \theta d/\eta, \theta\eta d)$*, $\eta > 0$.*

Il est clair que ce théorème de caractérisation par EMV pour la loi GIG contient, entre autres, les caractérisations obtenues en fixant des valeurs du paramètre p, par exemple les caractérisations par EMV des lois gaussienne inverse, hyperbolique ou harmonique. Ainsi, la caractérisation due à Hürlimann (1998) est un cas particulier de notre théorème 4.1.

1.2. Caractérisation du type Stein. La méthode de Stein pour l'approximation normale, introduite par Stein (1972), a été au fil des années adaptée à d'autres loi de probabilité comme, pour n'en citer que quelques unes, la loi de Poisson (Chen, 1975), la loi exponentielle (Chatterjee *et al*, 2011), la loi gamma (Luk, 1994).

La première étape de cette méthode consiste à trouver un "opérateur de Stein" approprié, dont les propriétés déterminent la qualité de l'approximation (voir par exemple Ross, 2011). Cet opérateur vérifie un *théorème de caractérisation de Stein* qui le relie à la loi cible.

En collaboration avec Christophe Ley (article KL2), nous proposons cette caractérisation à la Stein pour la loi GIG dans le théorème suivant :

THÉORÈME 4.2. *Une variable aléatoire positive X suit la loi GIG(p, a, b) si et seulement si pour toute fonction dérivable h vérifiant*

$$\lim_{x\to\infty} f_{p,a,b}(x)h(x) = \lim_{x\to 0} f_{p,a,b}(x)h(x) = 0,$$

on a

$$\mathbb{E}\left[h'(X) + \left(\frac{p-1}{X} + \frac{b}{2X^2} - \frac{a}{2}\right) h(X)\right] = 0.$$

La fonctionnelle $h \mapsto \mathcal{T}_{f_{p,a,b}}(h)(x) := h'(x) + \left(\frac{p-1}{x} + \frac{b}{2x^2} - \frac{a}{2}\right) h(x)$ est l'opérateur de Stein de la loi GIG.

Ce résultat est un exemple particulier de l'approche par densité des caractérisations de Stein, initiée dans Stein *et al* (2004) et développée par Ley et Swan (2013). On peut remplacer les fonctions $h(x)$ par $h(x)x^2$, et l'opérateur de Stein de la GIG $\mathcal{T}_{f_{p,a,b}}(h)$ prendrait alors la forme

$$\mathcal{T}_{f_{p,a,b}}(h)(x) = x^2h'(x) + \left(-x^2\frac{a}{2} + (p+1)x + \frac{b}{2}\right) h(x).$$

2. Tests optimaux pour les paramètres dans les modèles GIG, basés sur la propriété ULAN

2.1. Introduction. La littérature concernant les aspects probabilistes des lois GIG est assez conséquente, mais il y a moins d'études qui traitent ces lois d'un point de vue statistique. Parmi les travaux concernant les propriétés statistiques des lois GIG, on peut citer le livre de Jørgensen (1982, chapitres 4-7), et des travaux plus récents sur les lois de Halphen (dont les lois GIG, encore appelées lois de Halphen de type A, sont un cas particulier), par exemple Perreault *et al.* (1999a,b) ou Chebana *et al.* (2010).

Une méthode standard pour tester un paramètre (qui peut être vectoriel) d'un modèle statistique consiste à utiliser un test du rapport de vraisemblance. Ce test est basé sur l'estimation du paramètre par la méthode du maximum de vraisemblance. Les procédures de test basées sur l'estimateur du maximum de vraisemblance (MV) sont les plus puissantes. Cependant, dans le cas des modèles généraux GIG, leur efficacité est quelque peu diminuée par le fait qu'il n'existe pas d'expression explicite de la solution des équations de vraisemblance, en particulier pour l'estimation simultanée des trois paramètres. Des méthodes numériques ont été proposées, par exemple par Perreault *et* *al.* (1999b) et Lemonte & Cordeiro (2011). En guise d'alternative à l'estimation par la méthode MV, Fitzgerald (2000) a fourni des expressions exactes des estimateurs par la méthode des moments (MM). Malgré leur simplicité d'utilisation, due aux expressions explicites, les tests basés sur ces estimateurs par la méthode MM sont moins efficaces que les tests du rapport de vraisemblance. Pour trouver un compromis entre efficacité et simplicité, Chebana *et al.* (2010) propose une combinaison des méthodes MM et MV pour l'estimation.

Dans notre contribution (article [KL1]) à cette littérature concernant les problèmes d'estimation et de tests des paramètres des modèles GIG, nous ne proposons pas un compromis entre efficacité et simplicité, mais nous construisons des tests combinant de manière optimale les deux approches, puisque les tests proposés allient l'efficacité issue de l'analogie avec la procédure ML et la simplicité due à l'estimation des paramètres inconnus par la méthode des moments. Pour cela, nous utilisons la *méthodologie de Le Cam*. La première étape de cette méthodologie consiste à observer que les modèles GIG satisfont la propriété *ULAN* (normalité asymptotique locale uniforme). Grâce à cette propriété, nous construisons des procédures optimales pour toute hypothèse nulle concernant un ou plusieurs des paramètres p, a et b, les autres paramètres étant inconnus. Les tests obtenus sont aussi efficaces que ceux du rapport de vraisemblance car les statistiques de test ressemblent au score de Rao, mais sont meilleurs que les tests basés sur le score de Rao parce que les paramètres inconnus peuvent être estimés par des formules explicites grâce à la méthode des moments et que par conséquent il n'est pas nécessaire de les estimer par la méthode du maximum de vraisemblance. Un autre intérêt de l'utilisation de l'approche de Le Cam est que nous pouvons calculer la puissance des tests obtenus contre une série d'alternatives contiguës.

Le travail que nous présentons dans cette partie consiste d'abord à établir la propriété ULAN pour les modèles GIG et la *linéarité asymptotique* qui en découle. Ceci ne présente pas de difficulté particulière car la densité GIG est très régulière par rapport aux paramètres. Ensuite, nous montrons la construction de tests optimaux de l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0 : p = p_0$ contre $\mathcal{H}_1^{\neq} : p \neq p_0$, déterminons le comportement asymptotique de ces tests sous l'hypothèse nulle et sous des alternatives contiguës et donnons explicitement les puissances asymptotiques. Nous traitons ensuite le cas particulier $p_0 = -1/2$, c'est-à-dire le cas où l'on teste l'hypothèse nulle gaussienne inverse (IG) au sein des modèles GIG. Cela induit automatiquement un test de l'hypothèse gaussienne inverse réciproque (RIG) , puisque $X \sim \mathrm{IG}(a, b) \Longleftrightarrow \frac{1}{X} \sim \mathrm{RIG}(b, a)$).

Ensuite nous procédons à des simulations de Monte Carlo pour évaluer la performance des tests obtenus, puis nous donnons deux applications de ces tests à des données réelles.

Dans cette synthèse nous présentons quelques résultats obtenus. Nous renvoyons à l'article pour quelques détails techniques, pour les calculs explicites dans le cas $p_0 = -1/2$ et pour les résultats des simulations. Mais il paraît nécessaire de rappeler dans un premier temps quelques définitions et les outils qui nous ont servi à établir nos résultats.

2.2. Rappel des notions théoriques utilisées. Pour faciliter la lecture des résultats, nous rappelons des définitions et quelques faits concernant les outils théoriques utilisés. Ces rappels sont tirés de van der Vaart (1998). Dans la notation adoptée, v' désigne la transposée de toute matrice v. Les éléments de $\mathbb{R}^k$ sont considérés comme des matrices-colonne.

2.2.1. *Différentiabilité en moyenne quadratique et propriété ULAN.*

DÉFINITION 4.1. *Soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}^k$. Soit $\{P_\theta; \theta \in \Theta\}$ une famille de mesures de probabilité sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. On suppose que pour tout $\theta \in \Theta$, la mesure de probabilité P_θ admet une densité f_θ par rapport à une mesure μ. Le modèle statistique $\{P_\theta; \theta \in \Theta\}$ est dit différentiable en moyenne quadratique en $\theta_0 \in \Theta$ s'il existe une fonction mesurable $\dot{l}_{\theta_0} : \Omega \to \mathbb{R}^k$ telle que*

$$\int \left(\sqrt{f_\theta} - \sqrt{f_{\theta_0}} - \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)' \dot{l}_{\theta_0} \sqrt{f_{\theta_0}} \right)^2 d\mu = o(\|\theta - \theta_0\|^2).$$

DÉFINITION 4.2. *Soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}^k$. Pour tout entier n et pour tout $\theta \in \Theta$, soit $P_{n,\theta}$ une mesure de probabilité sur un espace donné. La suite de modèles statistiques $(P_{n,\theta}; \theta \in \Theta)_n$ est dite LAN (locally asymptotically normal) en θ s'il existe des matrices r_n et I_θ et des vecteurs aléatoires $\mathbf{\Delta}_{n,\theta}$ tels que la suite $(\mathbf{\Delta}_{n,\theta})$, appelée suite centrale, converge en loi, sous $P_{n,\theta}$, vers $N(0, I_\theta)$ et tels que pour toute suite (h_n) convergeant vers $h \in \mathbb{R}^k$,*

$$\log \frac{d\mathrm{P}_{n,\theta + r_n^{-1} h_n}}{d\mathrm{P}_{n,\theta}} = h' \mathbf{\Delta}_{n,\theta} - \frac{1}{2} h' I_\theta h + o_{P_{n,\theta}}(1). \tag{13}$$

Un exemple typique est le cas où $P_{n,\theta}$ est la loi de $(X_1, \ldots, X_n)$, où $X_1, \ldots, X_n$ sont n copies indépendantes d'une variable aléatoire de loi P_θ, de densité f_θ. On a alors le théorème suivant (van der Vaart, 1998, théorème 7.2) :

THÉORÈME 4.3. *Avec les notations ci-dessus, si le modèle statistique* $\{P_\theta;\, \theta \in \Theta\}$ *est différentiable en moyenne quadratique en* θ, *alors* $\int \dot{l}_\theta \, dP_\theta = 0$, *la matrice d'information de Fisher* $I_\theta = \int \dot{l}_\theta \dot{l}'_\theta \, dP_\theta$ *existe. De plus, pour toute suite* (h_n) *convergeant vers* $h \in \mathbb{R}^k$,

$$\log \prod_{i=1}^{n} \frac{f_{\theta + h_n/\sqrt{n}}}{f_\theta}(X_i) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} h' \dot{l}_\theta(X_i) - \frac{1}{2} h' I_\theta h + o_{P_\theta}(1). \tag{14}$$

Le lemme suivant (van der Vaart, 1998, lemme 7.6) donne une condition suffisante de différentiabilité en moyenne quadratique.

LEMME 4.1. *Avec les mêmes notations que ci-dessus, si (i) la fonction* $\theta \mapsto \sqrt{f_\theta(x)}$ *est de classe* C^1 *pour tout* x *; (ii) les éléments de la matrice d'information de Fisher sont bien définis et continus en* θ, *alors le modèle statistique* $\{P_\theta;\, \theta \in \Theta\}$ *est différentiable en moyenne quadratique en tout* $\theta_0 \in \Theta$.

DÉFINITION 4.3. *Sous les hypothèses de ce lemme, d'après Ibragimov et Khas'minskii (1981), la convergence donnée par (14) a lieu uniformément sur les compacts de* Θ, *et dans ce cas on dit que la suite de modèles statistiques* $(P_{n,\theta};\, \theta \in \Theta)_n$ *est ULAN (Uniformly locally asymptotically normal).*

2.2.2. *Contiguïté et troisième lemme de Le Cam.*

DÉFINITION 4.4. *Soit* $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)_n$ *une suite d'espaces mesurables. Pour tout* n, *soient* P_n *et* Q_n *des mesures de probabilité sur* $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$. *La suite* (Q_n) *est dite contiguë par rapport à la suite* (P_n) *si, pour toute suite d'ensembles mesurables* A_n, *on a l'implication* $P_n(A_n) \to 0 \Rightarrow Q_n(A_n) \to 0$. *Les deux suites sont dites mutuellement contiguës si elles sont contiguës l'une par rapport à l'autre.*

Un intérêt de la contiguïté de deux suites de mesures de probabilité (P_n) et (Q_n) est de pouvoir obtenir des lois limites sous (Q_n) à partir de lois limites sous (P_n). Typiquement, dans la théorie des tests statistiques, P_n est la loi d'une statistique sous une hypothèse nulle et Q_n la loi sous une hypothèse alternative.

Exemple important de contiguïté : Si la suite de variables aléatoires $(\frac{dP_n}{dQ_n})$ converge en loi, sous (Q_n), vers e^X, où X suit une loi normale $N(m, \sigma^2)$, alors la suite (Q_n) est contiguë par rapport à (P_n). Les deux suites sont mutuellement contiguës si et seulement si $m = -\frac{1}{2}\sigma^2$.

Un des outils utilisés dans ce travail est le théorème suivant, appelé dans la littérature *troisième lemme de Le Cam* :

THÉORÈME 4.4. *Soient* P_n *et* Q_n *des mesures de probabilité sur des espaces* $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, *et soit* $X_n : \Omega_n \to \mathbb{R}^k$ *une suite de vecteurs* *aléatoires. On suppose que* $(X_n, \log \frac{dQ_n}{dP_n})$ *converge en loi, sous* (P_n), *vers* (X, V), *où* (X, V) *suit la loi normale* $k+1$*-dimensionnelle de moyenne* $(m, -\frac{1}{2}\sigma^2)$ *et de matrice de covariance*

$$\begin{pmatrix} \Sigma & \tau \\ \tau' & \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Alors (X_n) *converge en loi, sous* Q_n, *vers la loi normale* k*-dimensionnelle de moyenne* $m + \tau$ *et de matrice de covariance* Σ.

Une application intéressante de la notion de normalité locale asymptotique est qu'elle permet d'étudier le comportement de statistiques de test sous des alternatives contiguës. En effet, si cette propriété est vérifiée, alors, en vertu de (14), $\log \frac{d\mathrm{P}_{n,\theta+h/\sqrt{n}}}{d\mathrm{P}_{n,\theta}}$ converge en loi, sous $\mathrm{P}_{n,\theta}$, vers $N(-\frac{1}{2}h'I_\theta h, h'I_\theta h)$. Par conséquent, d'après l'exemple de contiguïté donné plus haut, les mesures de probabilité $\mathrm{P}_{n,\theta+h/\sqrt{n}}$ et $\mathrm{P}_{n,\theta}$ sont mutuellement contigües. Cette contiguïté, combinée avec le troisième lemme de Le Cam, permet souvent d'obtenir, comme nous le ferons dans le cas des modèles GIG, la loi limite de statistiques de test sous $\mathrm{P}_{n,\theta+h/\sqrt{n}}$ connaissant le comportement asymptotique sous $\mathrm{P}_{n,\theta}$, ce qui est utile par exemple dans l'étude de l'efficacité asymptotique d'estimateurs ou de tests.

2.3. Propriété ULAN et linéarité asymptotique des modèles $\mathrm{GIG}(p, a, b)$**.** Nous établissons ici la propriété ULAN pour des modèles GIG généraux. $\mathbb{R}_0^+$ est l'intervalle $(0, +\infty)$.

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon i.i.d. suivant la loi $GIG(p, a, b)$ de densité (2). Soit $\mathrm{P}_{p,a,b}^{(n)}$ la loi conjointe de $(X_1, \ldots, X_n)$. Considérons le modèle paramétrique GIG

$$\mathcal{P}_{GIG}^{(n)} := \left\{ \mathrm{P}_{p,a,b}^{(n)} : p \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_0^+, b \in \mathbb{R}_0^+ \right\}.$$

THÉORÈME 4.5. *Pour* $p \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_0^+$ *et* $b \in \mathbb{R}_0^+$, *soit* $\boldsymbol{\vartheta} = (p, a, b)'$. *Alors, pour tout* $\boldsymbol{\vartheta}^{(n)} = (p^{(n)}, a^{(n)}, b^{(n)}))' = \boldsymbol{\vartheta} + O(n^{-1/2})$ *et pour toute suite bornée* $\boldsymbol{\tau}^{(n)} = (\tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)}, \tau_3^{(n)})' \in \mathbb{R}^3$ *telle que* $a^{(n)} + n^{-1/2}\tau_2^{(n)} > 0$ *et* $b^{(n)} + n^{-1/2}\tau_3^{(n)} > 0$, *la famille de mesures de probabilité* $\mathcal{P}_{GIG}^{(n)}$ *satisfait*

$$\begin{aligned} \Lambda^{(n)}_{\boldsymbol{\vartheta}^{(n)}+n^{-1/2}\boldsymbol{\tau}^{(n)}/\boldsymbol{\vartheta}^{(n)}} &:= \log(d\mathrm{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\vartheta}^{(n)}+n^{-1/2}\boldsymbol{\tau}^{(n)}}/d\mathrm{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\vartheta}^{(n)}}) \\ &= \boldsymbol{\tau}^{(n)\prime}\boldsymbol{\Delta}^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}^{(n)}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}^{(n)\prime}\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{\vartheta})\boldsymbol{\tau}^{(n)} + o_P(1), \end{aligned} \tag{15}$$

et $\boldsymbol{\Delta}^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_3(\mathbf{0}, \mathit{\Gamma}(\boldsymbol{\vartheta}))$, *sous* $\mathrm{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\vartheta}^{(n)}}$ *lorsque* $n \to \infty$, *où*

$$\mathbf{\Delta}^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}) \;:=\; \begin{pmatrix} \Delta_1^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}) \\ \Delta_2^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}) \\ \Delta_3^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}) \end{pmatrix} := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial_p c(p,a,b)}{c(p,a,b)} + \log(X_i)\right) \\ \left(\frac{\partial_a c(p,a,b)}{c(p,a,b)} - \frac{X_i}{2}\right) \\ \left(\frac{\partial_b c(p,a,b)}{c(p,a,b)} - \frac{1}{2X_i}\right) \end{pmatrix},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\log(a/b) - \partial_p \log K_p(\sqrt{ab}) + \log(X_i)\right) \\ \left(\frac{p}{2a} - \partial_a \log K_p(\sqrt{ab}) - \frac{X_i}{2}\right) \\ \left(-\frac{p}{2b} - \partial_b \log K_p(\sqrt{ab}) - \frac{1}{2X_i}\right) \end{pmatrix},$$

et

$$\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{\vartheta}) := \begin{pmatrix} \Gamma_{p,p}(\boldsymbol{\vartheta}) & \Gamma_{p,a}(\boldsymbol{\vartheta}) & \Gamma_{p,b}(\boldsymbol{\vartheta}) \\ \Gamma_{p,a}(\boldsymbol{\vartheta}) & \Gamma_{a,a}(\boldsymbol{\vartheta}) & \Gamma_{a,b}(\boldsymbol{\vartheta}) \\ \Gamma_{p,b}(\boldsymbol{\vartheta}) & \Gamma_{a,b}(\boldsymbol{\vartheta}) & \Gamma_{b,b}(\boldsymbol{\vartheta}) \end{pmatrix},$$

avec

$$\Gamma_{p,p}(\boldsymbol{\vartheta}) := \partial^2_{pp} \log K_p(\sqrt{ab}), \quad \Gamma_{a,a}(\boldsymbol{\vartheta}) := \frac{p}{2a^2} + \partial^2_{aa} \log K_p(\sqrt{ab}),$$

$$\Gamma_{b,b}(\boldsymbol{\vartheta}) := -\frac{p}{2b^2} + \partial^2_{bb} \log K_p(\sqrt{ab}), \quad \Gamma_{p,a}(\boldsymbol{\vartheta}) := -\frac{1}{2a} + \partial^2_{ap} \log K_p(\sqrt{ab}),$$

$$\Gamma_{p,b}(\boldsymbol{\vartheta}) := \frac{1}{2b} + \partial^2_{ba} \log K_p(\sqrt{ab}), \quad \Gamma_{a,b}(\boldsymbol{\vartheta}) := \partial^2_{ab} \log K_p(\sqrt{ab}).$$

Autrement dit, pour des perturbations d'ordre $n^{-1/2}$, la famille $\mathcal{P}^{(n)}_{GIG}$ est ULAN en $\boldsymbol{\vartheta}$, avec comme suite centrale $\mathbf{\Delta}^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta})$, la matrice d'information de Fisher correspondante étant $\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{\vartheta})$.

Ce théorème résulte des observations suivantes : (i) la fonction

$$(p, a, b) \mapsto \sqrt{c(p, a, b) x^{p-1} e^{-(ax+b/x)/2}}$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ pour tout $x > 0$; (ii) la matrice d'information de Fisher associée est bien définie et continue en p, a et b. Par suite, en utilisant le lemme 4.1, $(p, a, b) \mapsto \sqrt{c(p, a, b) x^{p-1} e^{-(ax+b/x)/2}}$ est différentiable en moyenne quadratique, et la propriété ULAN s'ensuit grâce au théorème 7.2 de van der Vaart (1998).

Ce résultat permet d'approcher le modèle paramétrique $\mathcal{P}^{(n)}_{GIG}$, localement (dans un voisinage de $(p, a, b)'$), lorsque n tend vers l'infini, par le modèle gaussien

$$\mathcal{P}_{\boldsymbol{\vartheta}} := \left\{ \mathrm{P}_{\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\vartheta}} = \mathcal{N}_3\left(\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{\vartheta})\boldsymbol{\tau}, \mathit{\Gamma}(\boldsymbol{\vartheta})\right) \,|\, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

En effet, le développement (15), au terme de reste près, ressemble au rapport de vraisemblance du modèle gaussien ci-dessus. Les procédures optimales pour ce modèle gaussien étant bien connues, cette approximation permet de construire des tests optimaux pour le modèle GIG. La construction de ces tests est basée sur la propriété ULAN énoncée dans le théorème précédent, et aussi sur son corollaire suivant ("linéarité asymptotique" de la suite centrale) :

$$\boldsymbol{\Delta}^{(n)}\left(\boldsymbol{\vartheta} + n^{-1/2}\boldsymbol{\tau}^{(n)}\right) = \boldsymbol{\Delta}^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}) - \mathit{\Gamma}(\boldsymbol{\vartheta})\boldsymbol{\tau}^{(n)} + o_{\mathrm{P}}(1), \tag{16}$$

sous $\mathrm{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\vartheta}^{(n)}}$ lorsque $n \to \infty$. Cette linéarité asymptotique permet d'appréhender le comportement de la suite centrale $\boldsymbol{\Delta}^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta})$ lorsque $\boldsymbol{\vartheta} = (p, a, b)$ est remplacé par un estimateur $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)}$. Si cet estimateur est suffisamment régulier et est tel que $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)} - \boldsymbol{\vartheta} = O_{\mathrm{P}}(1/\sqrt{n})$, alors on peut remplacer, dans l'équation (16), $\boldsymbol{\tau}^{(n)}$ par $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)} - \boldsymbol{\vartheta})$ pour obtenir

$$\boldsymbol{\Delta}^{(n)}\left(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)}\right) = \boldsymbol{\Delta}^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}) - \sqrt{n}\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{\vartheta})(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)} - \boldsymbol{\vartheta}) + o_{\mathrm{P}}(1)$$

sous $\mathrm{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\vartheta}^{(n)}}$ lorsque $n \to \infty$.

2.4. Construction de tests efficaces. Nous construisons dans cette partie un test de l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0 : p = p_0$ contre $\mathcal{H}_1^{\neq} : p \neq p_0$ pour $p_0 \in \mathbb{R}$. Le test est construit en deux étapes : nous supposons, dans une première étape, les paramètres a et b connus. Dans une seconde étape où nous les supposerons inconnues, elles devront être estimées. La méthode que nous proposons ne s'applique pas seulement au cas où l'on souhaite faire un test sur le paramètre p, mais peut être utilisée pour tester les paramètres a ou b, les vecteurs $(p, a)'$, $(p, b)'$, $(a, b)'$, ou le vecteur $(p, a, b)'$. Ce dernier cas est le plus simple, la seconde étape d'estimation n'étant pas nécessaire.

2.4.1. *1ère étape : les paramètres a et b sont connus.* Dans ce cas, on lit la propriété ULAN uniquement en p et, par analogie avec le modèle gaussien, la procédure optimale de test de l'hypothèse $p = p_0$ contre $p \neq p_0$ consiste à rejeter l'hypothèse nulle au niveau asymptotique α si la statistique

$$\begin{aligned} Q_{p_0}^{(n)}(a, b) &:= \frac{\Delta_p^{(n)}(p_0, a, b)}{\sqrt{\Gamma_{p,p}(p_0, a, b)}} \\ &= \frac{n^{-1/2}\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\log(a/b) - (\partial_p \log K_p(\sqrt{ab}))|_{p=p_0} + \log(X_i)\right)}{\sqrt{(\partial^2_{pp} \log K_p(\sqrt{ab}))|_{p=p_0}}} \end{aligned}$$

dépasse en valeur absolue $z_{\alpha/2}$, le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale standard.

La validité et l'optimalité de ce test noté $\phi_{p_0}^{(n)}(a,b)$ découlent du résultat plus général donné par le théorème 4.6 ci-dessous. L'optimalité signifie ici que le test est asymptotiquement *maximin*. Cela résulte du fait que le modèle converge vers un modèle gaussien. Rappelons qu'un test ϕ^* est dit maximin dans la classe $\mathcal{C}_\alpha$ des tests de niveau α de l'hypothèse $\mathcal{H}_0$ contre $\mathcal{H}_1$ si (i) le niveau de ϕ^* est α et (ii) sa puissance est telle que

$$\inf_{\mathrm{P}\in\mathcal{H}_1} \mathrm{E}_{\mathrm{P}}[\phi^*] \geq \sup_{\phi\in\mathcal{C}_\alpha} \inf_{\mathrm{P}\in\mathcal{H}_1} \mathrm{E}_{\mathrm{P}}[\phi].$$

2.4.2. *2ème étape : les paramètres a et b sont inconnus.* Dans ce cas, les paramètres a et b doivent être estimés, et on remplace a et b par les estimateurs correspondants $\hat{a}^{(n)}$ et $\hat{b}^{(n)}$ dans la statistique $Q_{p_0}^{(n)}(a,b)$ pour obtenir $Q_{p_0}^{(n)}(\hat{a}^{(n)},\hat{b}^{(n)})$. Cette substitution nécessite de considérer la *suite centrale efficace*

$$\begin{aligned} &\Delta_p^{(n)eff}(\boldsymbol{\vartheta}) \\ := \ &\Delta_p^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}) - \mathrm{Cov}(\Delta_p^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}), (\Delta_a^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}), \Delta_b^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}))) \\ &\times \left(\mathrm{Var}((\Delta_a^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}), \Delta_b^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}))')\right)^{-1} (\Delta_a^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}), \Delta_b^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}))' \\ = \ &\Delta_p^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}) - \frac{(\Gamma_{p,a}(\boldsymbol{\vartheta}), \Gamma_{p,b}(\boldsymbol{\vartheta})) \begin{pmatrix} \Gamma_{b,b}(\boldsymbol{\vartheta}) & -\Gamma_{a,b}(\boldsymbol{\vartheta}) \\ -\Gamma_{a,b}(\boldsymbol{\vartheta}) & \Gamma_{a,a}(\boldsymbol{\vartheta}) \end{pmatrix} (\Delta_a^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}), \Delta_b^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}))'}{\Gamma_{a,a}(\boldsymbol{\vartheta})\Gamma_{b,b}(\boldsymbol{\vartheta}) - (\Gamma_{a,b}(\boldsymbol{\vartheta}))^2} \end{aligned}$$

qui est asymptotiquement non corrélée aux suites centrales correspondant à a et b. L'information de Fisher associée à $\Delta_p^{(n)eff}(\boldsymbol{\vartheta})$ est

$$\begin{aligned} &\Gamma_{p,p}^{eff}(\boldsymbol{\vartheta}) \\ := \ &\Gamma_{p,p}(\boldsymbol{\vartheta}) - \frac{(\Gamma_{p,a}(\boldsymbol{\vartheta}), \Gamma_{p,b}(\boldsymbol{\vartheta})) \begin{pmatrix} \Gamma_{b,b}(\boldsymbol{\vartheta}) & -\Gamma_{a,b}(\boldsymbol{\vartheta}) \\ -\Gamma_{a,b}(\boldsymbol{\vartheta}) & \Gamma_{a,a}(\boldsymbol{\vartheta}) \end{pmatrix} (\Gamma_{p,a}(\boldsymbol{\vartheta}), \Gamma_{p,b}(\boldsymbol{\vartheta}))'}{\Gamma_{a,a}(\boldsymbol{\vartheta})\Gamma_{b,b}(\boldsymbol{\vartheta}) - (\Gamma_{a,b}(\boldsymbol{\vartheta}))^2} \\ = \ &\frac{\det \Gamma(\boldsymbol{\vartheta})}{\Gamma_{a,a}(\boldsymbol{\vartheta})\Gamma_{b,b}(\boldsymbol{\vartheta}) - (\Gamma_{a,b}(\boldsymbol{\vartheta}))^2}. \end{aligned}$$

On peut se référer à Bickel *et al.* (1993, chapitre 2) ou à van der Vaart (1998, chapitre 25) concernant les suites centrales efficaces et leur matrice d'information efficace associée.

La proposition suivante établit la linéarité asymptotique de la suite centrale efficace et de la matrice d'information correspondante :

PROPOSITION 4.1. *Pour tout* $\boldsymbol{\vartheta} = (p, a, b)' \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_0^+)^2$, *et pour toute suite bornée* $\boldsymbol{\tau}^{(n)} = (0, \tau_2^{(n)}, \tau_3^{(n)})' \in \{0\} \times \mathbb{R}^2$ *telle que* $a + n^{-1/2}{\tau_2}^{(n)} > 0$ *et* $b + n^{-1/2}{\tau_3}^{(n)} > 0$, *on a, sous* $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)}$, *lorque* $n \to \infty$,

$$\Delta_p^{(n)eff}(\boldsymbol{\vartheta} + n^{-1/2}\boldsymbol{\tau}^{(n)}) = \Delta_p^{(n)eff}(\boldsymbol{\vartheta}) + o_{\mathrm{P}}(1) \tag{17}$$

et

$$\Gamma_{p,p}^{eff}(\boldsymbol{\vartheta} + n^{-1/2}\boldsymbol{\tau}^{(n)}) = \Gamma_{p,p}^{eff}(\boldsymbol{\vartheta}) + o_{\mathrm{P}}(1). \tag{18}$$

La justification de la construction du test lorsque a et b sont inconnues est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2. *Soit* $p_0 \in \mathbb{R}$. *Supposons les estimateurs* $\hat{a}^{(n)}$ *et* $\hat{b}^{(n)}$ *suffisamment réguliers. Alors, en posant*

$$Q_{p_0}^{(n)eff}(a, b) = \frac{\Delta_p^{(n)eff}(p_0, a, b)}{\sqrt{\Gamma_{p,p}^{eff}(p_0, a, b)}},$$

on a

$$Q_{p_0}^{(n)eff}(\hat{a}^{(n)}, \hat{b}^{(n)}) - Q_{p_0}^{(n)eff}(a, b) = o_{\mathrm{P}}(1) \tag{19}$$

sous $\mathrm{P}_{p_0,a,b}^{(n)}$ *lorsque* $n \to \infty$.

Cela nous permet de donner la procédure optimale de test de l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0 : p = p_0$ contre $\mathcal{H}_1^{\neq} : p \neq p_0$ lorsque les paramètres a et b sont inconnus. Ce test, que nous notons $\phi_{p_0}^{(n)}(\hat{a}^{(n)}, \hat{b}^{(n)})$, rejette $\mathcal{H}_0$ au niveau asymptotique α si $Q_{p_0}^{(n)eff}(\hat{a}^{(n)}, \hat{b}^{(n)})$ dépasse $z_{\alpha/2}$ en valeur absolue, où $\hat{a}^{(n)}$ et $\hat{b}^{(n)}$ sont des estimateurs suffisamment réguliers (c'est le cas des estimateurs obtenus par la méthode des moments).

Le théorème suivant établit la validité de ce test (comportement asymptotique de $Q_{p_0}^{(n)eff}(\hat{a}^{(n)}, \hat{b}^{(n)})$ sous l'hypothèse nulle), sa loi asymptotique sous des alternatives locales et son optimalité. Ce résultat couvre aussi le cas où a et b sont connus.

THÉORÈME 4.6. *Soit* $p_0 \in \mathbb{R}$. *Supposons les estimateurs* $\hat{a}^{(n)}$ *et* $\hat{b}^{(n)}$ *suffisamment réguliers. Alors*

(i) sous $\bigcup_{a \in \mathbb{R}_0^+} \bigcup_{b \in \mathbb{R}_0^+} \mathrm{P}_{p_0,a,b}^{(n)}$, $Q_{p_0}^{(n)eff}(\hat{a}^{(n)}, \hat{b}^{(n)})$ *suit asymptotiquement une loi normale standard ;*

(ii) pour tout $a \in \mathbb{R}_0^+$ *et* $b \in \mathbb{R}_0^+$, $Q_{p_0}^{(n)eff}(\hat{a}^{(n)}, \hat{b}^{(n)})$ *suit asymptotiquement une loi normale de moyenne* $\tau_1\sqrt{\Gamma_{p,p}^{eff}(p_0, a, b)}$ *et de variance 1 sous* $\mathrm{P}_{p_0+n^{-1/2}\tau_1^{(n)},a,b}^{(n)}$, *où* $\tau_1^{(n)} \in \mathbb{R}$ *est une suite convergente et* $\tau_1 := \lim_{n\to\infty} \tau_1^{(n)}$ *;*

(iii) le test $\phi_{p_0}^{(n)}(\hat{a}^{(n)}, \hat{b}^{(n)})$*, qui rejette l'hypothèse nulle*

$$\mathcal{H}_0 := \bigcup_{a \in \mathbb{R}_0^+} \bigcup_{b \in \mathbb{R}_0^+} \mathrm{P}_{p_0,a,b}^{(n)}$$

si $|Q_{p_0}^{(n)eff}(\hat{a}^{(n)}, \hat{b}^{(n)})| > z_{\alpha/2}$*, est de niveau* α *sous* $\mathcal{H}_0$ *et est localement et asymptotiquement maximin pour tester* $\mathcal{H}_0 : p = p_0$ *contre* $\mathcal{H}_1^{\neq} := \bigcup_{a \in \mathbb{R}_0^+} \bigcup_{b \in \mathbb{R}_0^+} \bigcup_{p \neq p_0} \mathrm{P}_{p,a,b}^{(n)}$.

Preuve du théorème 4.6. Le point (i) vient de la linéarité asymptotique donnée par (19) sous l'hypothèse nulle, puisque, grâce au théorème central limite, $\Delta_p^{(n)eff}(p_0, a, b)$ suit asymptotiquement la loi $\mathcal{N}(0, \Gamma_{p,p}^{eff}(p_0, a, b))$ sous $\bigcup_{a \in \mathbb{R}_0^+} \bigcup_{b \in \mathbb{R}_0^+} \mathrm{P}_{p_0,a,b}^{(n)}$.

Pour montrer la partie (ii), on observe que, sous $\mathrm{P}_{p_0,a,b}^{(n)}$ et pour toute suite convergente $\boldsymbol{\tau}^{(n)} = (\tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)}, \tau_3^{(n)})' \in \mathbb{R}^3$, lorsque $n \to \infty$,

$$\begin{pmatrix} \Delta_p^{(n)eff}(p_0, a, b) \\ \Lambda^{(n)}_{(p_0,a,b)'+n^{-1/2}\boldsymbol{\tau}^{(n)}/(p_0,a,b)'} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$\mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}'\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{\vartheta})\boldsymbol{\tau} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_{p,p}^{eff}(p_0, a, b) & \tau_1 \Gamma_{p,p}^{eff}(p_0, a, b) \\ \tau_1 \Gamma_{p,p}^{eff}(p_0, a, b) & \boldsymbol{\tau}'\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{\vartheta})\tau \end{pmatrix}\right),$$

où $\Lambda^{(n)}_{(p_0,a,b)'+n^{-1/2}\boldsymbol{\tau}^{(n)}/(p_0,a,b)'}$ est le log du rapport des vraisemblances et $\boldsymbol{\tau} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\tau}^{(n)}$. On peut alors appliquer le troisième lemme de Le Cam qui entraîne que $\Delta_p^{(n)eff}(p_0, a, b)$ suit asymptotiquement

$$\mathcal{N}\left(\tau_1 \Gamma_{p,p}^{eff}(p_0, a, b), \Gamma_{p,p}^{eff}(p_0, a, b)\right)$$

sous $\mathrm{P}^{(n)}_{p_0+n^{-1/2}\tau_1^{(n)},a,b}$. Puisque la linéarité asymptotique (19) a lieu aussi sous $\mathrm{P}^{(n)}_{p_0+n^{-1/2}\tau_1^{(n)},a,b}$ par contiguïté, on obtient le point (ii) du théorème.

Concernant le point (iii), le fait que $\phi_{p_0}^{(n)}$ est de niveau asymptotique α vient de la loi asymptotique donnée par (i) sous l'hypothèse nulle, et le fait que le test soit localement et asymptotiquement *maximin* est une conséquence de la convergence du modèle vers un modèle gaussien (voir Le Cam et Yang 2000). □

La partie (iii) du théorème 4.6 donne la preuve théorique de l'efficacité de notre test $\phi_{p_0}^{(n)}(\hat{a}^{(n)}, \hat{b}^{(n)})$, qui est donc aussi efficace que le test du rapport de vraisemblance $\phi_{p_0}^{\mathrm{LR}}$. Mais, par rapport à ce dernier, le test $\phi_{p_0}^{(n)}(\hat{a}^{(n)}, \hat{b}^{(n)})$ est plus simple, car il n'est pas nécessaire d'estimer a et b par la méthode du maximum de vraisemblance, puique tout estimateur de a (resp. de b) suffisamment régulier et dont l'écart avec a (resp. avec b) est $O(1/\sqrt{n})$, peut être utilisé. Nous optons pour les estimateurs par la méthode des moments, dont les expressions ont été fournies par Fitzgerald (2000) : $\hat{a}^{(n)}_{\mathrm{MM}} := \frac{\hat{\theta}^{(n)}_{\mathrm{MM}}}{\hat{\eta}^{(n)}_{\mathrm{MM}}}$ et $\hat{b}^{(n)}_{\mathrm{MM}} := \hat{\theta}^{(n)}_{\mathrm{MM}}\hat{\eta}^{(n)}_{\mathrm{MM}}$ où

$$\hat{\eta}^{(n)}_{\mathrm{MM}} := \sqrt{\frac{\bar{X}_{-1}s^2 - \bar{X}(\bar{X}\bar{X}_{-1}-1)}{\bar{X}(s_{-1})^2 - \bar{X}_{-1}(\bar{X}\bar{X}_{-1}-1)}}$$

et

$$\hat{\theta}^{(n)}_{\mathrm{MM}} := \frac{2\left(\frac{1}{\hat{\eta}^{(n)}_{\mathrm{MM}}}\bar{X} - \hat{\eta}^{(n)}_{\mathrm{MM}}\bar{X}_{-1}\right)}{\frac{1}{(\hat{\eta}^{(n)}_{\mathrm{MM}})^2}s^2 - (\hat{\eta}^{(n)}_{\mathrm{MM}})^2(s_{-1})^2},$$

avec $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, $\bar{X}_{-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}$ et $(s_{-1})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\frac{1}{X_i} - \bar{X}_{-1})^2$. Par suite, le test bilatéral, à la fois simple du point de vue calculatoire et efficace, que nous proposons est $\phi^{(n)}_{p_0} := \phi^{(n)}_{p_0}(\hat{a}^{(n)}_{\mathrm{MM}}, \hat{b}^{(n)}_{\mathrm{MM}})$ qui rejette l'hypothèse nulle au niveau α si la statistique

$$Q^{(n)}_{p_0} := Q^{(n)eff}_{p_0}(\hat{a}^{(n)}_{\mathrm{MM}}, \hat{b}^{(n)}_{\mathrm{MM}}) = \frac{\Delta^{(n)eff}_p(p_0, \hat{a}^{(n)}_{\mathrm{MM}}, \hat{b}^{(n)}_{\mathrm{MM}})}{\sqrt{\Gamma^{eff}_{p,p}(p_0, \hat{a}^{(n)}_{\mathrm{MM}}, \hat{b}^{(n)}_{\mathrm{MM}})}}$$

est, en valeur absolue, supérieure à $z_{\alpha/2}$. Les versions unilatérales de ce test sont aussi valides par la même construction, et leur comportement asymptotique est aussi obtenu par le théorème 4.6.

Comme nous l'avons indiqué plus haut, un des intérêts de l'approche de Le Cam est le fait de pouvoir donner des expressions explicites pour les puissances du test sous des alternatives de la forme $\mathrm{P}^{(n)}_{p_0+n^{-1/2}\tau_1^{(n)},a,b}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, où $\tau_1^{(n)}$ est une suite convergente, de limite τ_1. On obtient aisément ces puissances via le point (ii) du théorème 4.6, puisque cette partie du théorème nous donne la loi asymptotique de $Q^{(n)eff}_{p_0}(\hat{a}^{(n)}, \hat{b}^{(n)})$ sous une série d'alternatives locales. En notant Φ la fonction de répartition de la loi normale standard, la puissance asymptotique de $\phi^{(n)eff}_{p_0}(\hat{a}^{(n)}, \hat{b}^{(n)})$ est donnée par

$$1 - \Phi\left(z_{\alpha/2} - \tau_1\sqrt{\Gamma^{eff}_{p,p}(p_0,a,b)}\right) + \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \tau_1\sqrt{\Gamma^{eff}_{p,p}(p_0,a,b)}\right),$$

et par

$$1 - \Phi\left(z_{\alpha} - \tau_1\sqrt{\Gamma^{eff}_{p,p}(p_0,a,b)}\right) \qquad \text{et} \qquad \Phi\left(-z_{\alpha} - \tau_1\sqrt{\Gamma^{eff}_{p,p}(p_0,a,b)}\right)$$

dans les cas unilatéraux où les alternatives sont $\mathcal{H}_1^{>} : p > p_0$ et $\mathcal{H}_1^{<} : p < p_0$, respectivement.

Des calculs explicites qui ne sont pas détaillés ici, ont été faits dans le cas $p_0 = -1/2$, et des simulations montrent que le test proposé est au moins aussi puissant que le test du rapport de vraisemblance. Nous appliquons le test à deux données réelles.

CHAPITRE 5

Projet de recherche

Ce chapitre porte sur notre projet de recherche pour le futur proche. Comme on peut le remarquer, parmi les sujets mentionnés, beaucoup sont encore liés aux lois gaussiennes inverses (généralisées), car il reste encore du travail pour comprendre le comportement de ces lois dans différents contextes, par exemple celui de la méthode de Stein pour des approximations, celui des marches aléatoires sur les arbres, qui relève des probabilités discrètes, celui de la vitesse de convergence des chaînes de Markov liées à l'échantillonnage de Gibbs. La diversité de ces contextes apporte une certaine richesse thématique, même s'il y est question des lois GIG. Le sujet concernant les processus 1-dépendants contribuera à un enrichissement conséquent des thématiques de recherche.

Nous mentionnons dans un premier temps les sujets qui ont déjà fait l'objet d'une réflexion avancée et qui feront très probablement l'objet de publications dans un délai court. Nous évoquerons ensuite des thèmes sur lesquels nous travaillerons mais dont l'issue, en termes de résultats, est incertaine à ce jour.

1. Travaux en cours

1.1. Test d'ajustement pour la loi gaussienne inverse basé sur la propriété de Matsumoto-Yor. Avec S. Nkurunziza (Université de Windsor, Canada), et Aurélie Muller (IECL, Nancy), nous proposons (travail en cours de rédaction) un test d'ajustement pour la loi gaussienne inverse basé sur la propriété de Matsumoto-Yor et comparons, par des simulations, la puissance de ce test avec celle des tests existant dans la littérature. Le test que nous proposons est basé sur le résultat suivant, corollaire immédiat de la caractérisation associée à la propriété de Matsumoto-Yor :

Soit $\mu < 0$, $b > 0$ et Y une variable aléatoire telle que $Y \sim \gamma(-\mu, b)$. Soit $X > 0$ une variable indépendante de Y. Alors les variables $U = 1/(X+Y)$ et $V = 1/X - 1/(X+Y)$ sont indépendantes si et seulement s'il existe $a > 0$ tel que $X \sim GIG(\mu, a, b)$.

Etant donnés $\mu < 0$ et $b > 0$, nous exploitons ce corollaire pour proposer un test de l'hypothèse nulle

$$H_0 : \quad \text{il existe } a > 0 \text{ tel que } X \sim \mathrm{GIG}(\mu, a, b).$$

Nous obtenons ainsi un test d'adéquation pour la loi $\mathrm{GIG}(\mu, a, b)$ avec $\mu < 0$. Cette dernière condition n'est pas vraiment restrictive puisque si $\mu > 0$, il suffit d'utiliser l'équivalence

$$X \sim \mathrm{GIG}(\mu, a, b) \Longleftrightarrow \frac{1}{X} \sim \mathrm{GIG}(-\mu, b, a).$$

Le cas $\mu = 0$ n'est pas concerné, puisque la propriété de Matsumoto-Yor n'est plus valable dans ce cas.

1.2. Suppression de l'hypothèse d'existence de densités dans la propriété de Matsumoto-Yor Kummer-gamma. Le théorème 3.6 peut être exprimé à l'aide d'une transformation involutive (voir la thèse en cours de Marwa Hamza sous la direction de Pierre Vallois) :

THÉORÈME 5.1. *Soit $X, Y > 0$, deux variables aléatoires positives indépendantes, admettant des densités strictement positives et deux fois dérivables.*

Les variables aléatoires U et V définies par

$$U = \frac{Y}{1+X}, \quad V = X\left(1 + \frac{Y}{1+X}\right) \tag{20}$$

sont indépendantes si, et seulement s'il existe des constantes $a > 0$, $b > -a$, $c > 0$ telles que

$$X \sim K^{(2)}(a, b, c) \quad \text{et} \quad Y \sim \gamma(a+b, c).$$

Dans ces conditions, $U \sim K^{(2)}(a+b, -b, c)$ et $V \sim \gamma(a, c)$.

Nous faisons la conjecture que ce résultat est valable sous la simple hypothèse que les lois de X et de Y ne soient pas des masses de Dirac. Le lemme suivant sera probablement utile dans la preuve :

LEMME 5.1. *Si X et Y sont indépendantes et si U et V définies par (20) le sont aussi, alors pour tout α, $\beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $\sigma < 0$,*

$$\mathbb{E}(X^\alpha (1+X)^{-\beta} e^{\sigma X})\, \mathbb{E}(Y^\beta e^{\sigma Y}) = \mathbb{E}(U^\beta (1+U)^{-\alpha} e^{\sigma U})\, \mathbb{E}(V^\alpha e^{\sigma V}).$$

Ce lemme se démontre aisément en observant que $X+Y = U+V$ et que $X = V/(1+U)$ (la transformation $(X,Y) \mapsto (U,V)$ est involutive). Il est très probable qu'une exploitation judicieuse de ce lemme conduise à montrer l'existence d'une constante k telle que, si $L(\sigma) = \mathbb{E}(e^{\sigma Y})$, alors

$$L''L = k(L')^2,$$

équation différentielle caractéristique de la transformée de Laplace d'une loi gamma.

1.3. Caractérisation du produit tensoriel Kummer-gamma en termes de régression. Comme rappelé dans le chapitre 3, Wesołowsli (2002) a obtenu une extension de la caractérisation à la Matsumoto-Yor du produit GIG-gamma en remplaçant l'hypothèse d'indépendance par l'hypothèse de la constance de la régression de V par rapport à U. Il est fort probable que l'on puisse obtenir des résultats analogues pour le produit tensoriel Kummer-gamma. Il faudra ici manipuler les équations différentielles vérifiées par la fonction de Kummer intervenant dans la constante de normalisation de la densité de la loi de Kummer. On a la proposition suivante :

Proposition 5.1. *Soient X, Y des variables aléatoires strictement positives et indépendantes. On suppose que X, $1/X$ et Y sont intégrables. Soient U et V définies par (20). On suppose que les espérances conditionnelles $\mathbb{E}(V|U)$ et $\mathbb{E}(1/V|U)$ sont constantes :*

$$\mathbb{E}(V|U) = c_1, \quad \mathbb{E}(1/V|U) = c_2.$$

Soit

$$h(s) = \mathbb{E}(1/(1+X)^s), \quad s > 0.$$

Alors pour tout $s > 1$,

$$c_2 h(s+1)(h(s-1)-c_1 h(s))-c_2 h^2(s)+\mathbb{E}\left(\frac{1}{X(1+X)^s}\right)(h(s)-h(s+1)) = 0.$$

On vérifie directement, en utilisant des propriétés de la fonction Ψ, que cette équation est vérifiée quand $X \sim K^{(2)}(a,b,c)$et $Y \sim \gamma(a+b,c)$. Reste à prouver qu'elle n'est vérifiée que dans ce cas.

1.4. Quelques questions à propos d'une marche aléatoire sur un arbre muni de résistances gaussiennes inverses. Sur tout réseau électrique, on peut considérer une marche aléatoire qui passe du sommet x à un sommet voisin y avec probabilité C_{xy}/C_x, où C_{xy} est la conductance de l'arête xy et $C_x = \sum_{y\sim x} C_{xy}$. Il existe une interprétation du courant à l'aide de cette marche (Doyle & Snell, 1984). Considérons cette marche sur notre réseau électrique à résistances aléatoires de lois gaussiennes inverses décrit dans le théorème 3.2. Nous nous proposons d'étudier les propriétés de cette marche aléatoire en milieu aléatoire. Considérons en particulier la probabilité, appelée *escape probability* dans le livre de Doyle & Snell (1984), pour une particule partant de la racine x, d'atteindre le bord de l'arbre avant de retourner à la racine. D'après Doyle & Snell (1984), cette probabilité, pour des résistances déterministes, est

$$p_{esc} = \frac{C_{equiv}}{C_x}.$$

Dans le cas de résistances aléatoires, cette probabilité est aléatoire et les propriétés de la marche sont liées à la loi de p_{esc}. Nous avons déjà effectué des calculs dans des cas très simples :

1.4.1. *Résistances en série.* Pour une suite de résistances $R_1, R_2, \ldots, R_n$ en série, les conditions énoncées plus haut font que $R_i \sim IG(a_i, b)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$ et $R_n \sim RIG(a_n, b)$.
On a, dans ce cas,

$$p_{esc} = \frac{C_{equiv}}{C_x} = \frac{R_1}{R_{equiv}}.$$

Cette variable aléatoire a pour densité $(0 < u < 1)$

$$f_p(u) = \frac{a_1 b}{\pi} \exp(b \sum_{i=1}^{n} a_i) u^{-3/2} (1-u)^{-1/2} \times$$

$$\times K_0 \left(b \sqrt{\frac{a_1^2}{u} + \frac{(a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^2}{1-u}} \right).$$

1.4.2. *Deux résistances en série et une en parallèle.* Si R_1 et R_3 sont en série et R_2 en parallèle avec la série R_1, R_3, alors

$$\begin{aligned} p_{esc} = \frac{C_{equiv}}{C_x} &= \frac{1}{C_x R_{equiv}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \left(\frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_2} \right). \end{aligned}$$

La densité de probabilité de p_{esc} s'écrit alors $(0 < u < 1)$

$$f_p(u) = \frac{a_1 b_2 b_3}{(2\pi)^{3/2}} \exp(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) u^{-3/2} (1-u)^{-1/2} \times$$

$$\times \int_{(0,\infty)^2} v w^{-3/2} (v+w)^{1/2} \exp -\frac{1}{2} \left(a_1^2 \frac{v+w}{u} + (a_3^2 + 2a_1 a_3) w \right) \times$$

$$\times \exp -\frac{1}{2} \left(a_3^2 v + a_3^2 \frac{u v^2}{(v+w)(1-u)} + \frac{b_1^2}{v} + \frac{b_2^2}{w} \right) dv\, dw.$$

1.4.3. *Travail à faire.*
- Utiliser les propriétés de K_0 pour déterminer la probabilité de sortie (non conditionnée au milieu).
- Quel est, en fonction des paramètres, le comportement asymptotique de cette probabilité lorsque la taille de l'arbre tend vers l'infini ?
- Conditionnellement à la sortie, quel est le nombre moyen d'arêtes parcourues avant la sortie ?
- Si on définit un tel modèle pour un arbre infini, quelles sont les conditions sur les paramètres pour que la marche soit récurrente ? transiente ?

1.5. Probabilités de Lancaster et copules. La notion de copule (voir par exemple Nelsen, 1999) est abondamment traitée dans la littérature récente en probabilités et en statistique, avec des applications en économétrie et en finance (voir Kallenberg, 2008). Le fait que la loi d'un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles soit une probabilité de Lancaster est liée à la structure de dépendance entre les variables X et Y, qui par ailleurs est complètement caractérisée par la copule associée à (X, Y). Par conséquent, il est naturel d'étudier les copules associées aux probabilités de Lancaster. C'est une collaboration avec Denys Pommeret. Nous nous proposons notamment d'établir un procédé d'estimation de copules utilisant des polynômes orthogonaux. Disons quelques mots sur la problématique.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de lois marginales μ et ν et soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$) une base de $L^2(\mu)$ (resp. de $L^2(\nu)$ formée de polynôme orthonormaux par rapport à μ (resp. par rapport à ν). La loi jointe σ de (X, Y), satisfait la décomposition

$$\sigma(dx, dy) = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} \rho_{n,k} P_n(x) Q_k(y) \mu(dx)\nu(dy), \tag{21}$$

si l'on suppose que $\sum \rho_{n,k} P_n(x) Q_k(y)$ converge dans $L^2(\mu \times \nu)$, ou, de manière équivalente, si $\sum_{n,k\in\mathbb{N}} \rho_{n,k}^2 < \infty$. La suite $(\rho_{n,k})$ exprime la corrélation entre $P_n(X)$ et $Q_k(Y)$, car $\rho_{n,k} = \mathbb{E}(P_n(X)Q_k(Y))$. Sous l'hypothèse d'existence des densités, en notant respectivement $f_{X,Y}$, f_X et f_Y les densités respectives de (X, Y), de X et de Y, on a

$$f_{X,Y}(x, y) = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} \rho_{n,k} P_n(x) Q_k(y) f_X(x) f_Y(y). \tag{22}$$

Cette représentation présente plusieurs intérêts. En particulier, des estimateurs des coefficients $\rho_{n,k}$ sont facilement obtenus grâce aux corrélations empiriques entre $P_n(X)$ et $Q_n(Y)$ (voir Blacher, 1993). Ces coefficients peuvent aussi servir à mesurer l'indépendance entre X and Y (voir Lancaster, 1969). Un cas important est celui où $\rho_{n,k} = 0$ pour tout $n \neq k$, et σ est appelée *probabilité de Lancaster*. Comme nous l'avions dit dans le chapitre introductif, ces lois ont été introduites par Lancaster (1975).

La copule associée au couple (X, Y) est uniquement déterminée, si X et Y admettent des densités, par la relation

$$F_{X,Y}(s,t) = C(F_X(s), F_Y(t)), \tag{23}$$

où $F_{X,Y}$, F_X et F_Y désignent les fonctions de répartition.

En combinant (21) et (23), on obtient une expression de la copule C en fonction des polynômes orthogonaux. En effet, sous les bonnes hypothèses, une double dérivation de (23) donne

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) C''(F_X(x), F_Y(y)).$$

Par C'', on désigne $(\partial/\partial x)(\partial/\partial y)C$. En identifiant cette expression avec (22) on obtient

$$C''(u,v) = \sum_{n,k \in \mathbb{N}} \rho_{n,k} P_n(F_X^{-1}(u)) Q_k(F_Y^{-1}(v)).$$

En supposant que F_X et F_Y sont inversibles, on a alors

$$C(u,v) = \sum_{n,k \in \mathbb{N}} \rho_{n,k} \int_{-\infty}^{F_X^{-1}(u)} P_n(x)\mu(dx) \int_{-\infty}^{F_Y^{-1}(v)} Q_k(y)\nu(dy).$$

Notre objectif est d'exploiter cette égalité d'un point de vue statistique, par exemple pour tester l'égalité de deux copules lorsque les marges sont connues.

2. Perspectives de recherche

2.1. Méthode de Stein. Donnons deux exemples d'approximation où la caractérisation donnée par le théorème 4.2 pourrait être utilisée pour obtenir des vitesses de convergence. Cela fera l'objet d'une collaboration avec Christophe Ley et Yvik Swan.

2.1.1. *La loi GIG comme limite d'un schéma triangulaire.* La famille des Γ-convolutions généralisées (voir Eberlein et Hammerstein, 2004 et les références qui y sont données) est constituée par les lois de probabilité sur $[0, \infty)$ dont la fonction caractéristique a la forme

$$\phi(u) = \exp\left[iu\alpha - \int_0^\infty \log\left(1 - \frac{iu}{y}\right) dU(y)\right]$$

avec $\alpha \geq 0$ et $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que

$$U(0) = 0, \quad \int_0^1 |\log y| dU(y) < \infty, \quad \int_1^\infty \frac{1}{y} dU(y) < \infty.$$

La loi GIG(p, a, b) appartient à cette famille (on peut trouver une démonstration dans Eberlein et Hammerstein, 2004), avec

$$\alpha = 0, \; U(x) = \left[\max(0, p) + b \int_{a/2}^x g_{|p|}(2by - ab)\, dy \right] \mathbb{I}_{(a/2,\infty)}(x),$$

avec

$$g_\nu(x) = \frac{2}{\pi^2 x [J_\nu^2(\sqrt{x}) + Y_\nu^2(\sqrt{x})]}, \; x > 0,$$

où J_ν et Y_ν sont respectivement les fonctions de Bessel modifiées de première et deuxième espèces, d'indice ν. Voici un théorème où la loi GIG apparaît comme loi limite.

Théorème 5.2. *(Eberlein and Hammerstein, 2004). Soit $p \in \mathbb{R}$ et $a, b > 0$. Considérons la loi GIG(p, a, b) et la fonction U associée, définie ci-dessus.*
Soit $(K_n)_{n \geq 1}$ une suite telle que $K_n > a/2$. Pour tout $n \geq 1$, considérons une partition

$$a/2 = x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,k_n} = K_n$$

de $[a/2, K_n]$.
Soit $(X_{n,i}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1)$ une famille de variables aléatoires indépendantes telles que
- *$X_{n,1} \sim \gamma(p, a/2)$ si $p > 0$ et $X_{n,1} = 0$ si $p \leq 0$.*
- *Pour $2 \leq i \leq k_n$, $X_{n,1} \sim \gamma(x_{n,i}, U(x_{n,i}) - U(x_{n,i-1}))$.*

Alors, si $K_n \to \infty$ et $\sup_{1 \leq i \leq k_n} |x_{n,i}) - x_{n,i-1}|$ converge vers 0 lorsque $n \to \infty$, alors $\mathcal{L}(\sum_{i=1}^{K_n} X_{n,i})$ tend vers la loi GIG(p, a, b).

Question : Peut-on utiliser la méthode de Stein pour obtenir des bornes pour la distance entre $\mathcal{L}(\sum_{i=1}^{K_n} X_{n,i})$ et GIG(p, a, b) ?

2.1.2. *La loi GIG comme loi d'une fraction continue.* Le résultat suivant, dû à Letac et Seshadri (1983) caractérise la loi GIG comme la loi d'une fraction continue dont les entrées suivent des lois gamma :

Théorème 5.3. *Letac-Seshadri (1983).*
- *Soient X et Y des variables indépendantes positives telle que $Y \sim \gamma(p, a/2)$ avec $p, a > 0$. Alors $X =_d \frac{1}{Y+X}$ si et seulement si $X \sim$ GIG$(-p, a, a)$.*
- *Soient X, Y_1 et Y_2, trois variables indépendantes positives telles que $Y_1 \sim \gamma(p, b/2)$ et $Y_2 \sim \gamma(p, a/2)$ pour $p, a, b > 0$. Alors $X =_d \frac{1}{Y_1 + \frac{1}{Y_2 + X}}$ si et seulement si $X \sim$ GIG$(-p, a, b)$.*

– *Si* $(Y_i)_{i\geq 1}$ *est une suite de variables indépendantes telles que* $\mathcal{L}(Y_{2i-1}) = \mathcal{L}(Y_1) = \gamma(\lambda, b/2)$ *and* $\mathcal{L}(Y_{2i}) = \mathcal{L}(Y_2) = \gamma(\lambda, a/2)$; $i \geq 1$, *alors la loi de*

$$\cfrac{1}{Y_1 + \cfrac{1}{Y_2 + \cfrac{1}{Y_3 + \ddots}}}$$

est la loi $GIG(-\lambda, a, b)$.

Question : Peut-on utiliser la méthode de Stein pour obtenir des bornes pour la distance entre

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{Y_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{Y_n}}}}\right)$$

et $\mathrm{GIG}(p, a, b)$?

2.2. Loi gaussienne inverse et échantillonnage de Gibbs. L'échantillonnage de Gibbs est une méthode souvent utilisée en simulation. L'étude de la vitesse de convergence de la chaîne de Markov associée (du nombre d'itérations nécessaires pour être proche de la loi stationnaire) n'est pas aisée dans un cadre général. Diaconis *et al* (2008) a exhibé une classe d'exemples pour lesquelles cette étude donne lieu à des calculs explicites aboutissant à des bornes pour la distance en variation totale entre la loi de la chaîne et la loi stationnaire. Dans ces exemples, les lois concernées appartiennent à des familles exponentielles de variance quadratique, dont les familles des lois normale, gamma, Poisson, binomiale. On peut se demander si cette étude est possible pour d'autres familles exponentielles de fonction variance non quadratique, par exemple la famille engendrée par la loi gaussienne inverse, qui a une fonction variance cubique. Nous nous sommes aperçus que les outils utilisés par Diaconis *et al* (2008) ne sont plus applicables, notamment car l'opérateur sur lequel reposent les calculs semble ne pas être facilement diagonalisable. On ne peut pas non plus utiliser un simple argument de couplage comme dans Diaconis *et al* (2010).

2.3. Processus 1-dépendants. Un processus 1-dépendant (traduction peut-être maladroite de *one-dependent process*) est un processus à temps discret $(X_i, -\infty < i < \infty)$, tel que $X_i \in \{0, 1\}$ et tel que $(X_a, X_{a+1}, \ldots, X_{a+k})$ et $(X_{a+k+2}, \ldots, X_{a+b})$ sont indépendants pour tous entiers a, b et $k \leq b - 2$. Il est facile de construire des exemples de tels processus. Par exemple, si $U_i, -\infty < i < \infty$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ et si $h : [0,1]^2 \to \{0,1\}$ est fixé, alors $(X_i = h(U_{i-1}, U_i))$ est un processus 1-dépendant, appelé *2-block process* en théorie ergodique. On trouve d'autres exemples intéressants de processus 1-dépendants dans Borodin-Diaconis-Fulman (2009). Dans cet article, il est prouvé notamment que les processus 1-dépendants sont déterminantaux et que $P(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n)$ est un polynôme en $a_1, \dots, a_n$. Une question intéressante : que deviennent ces résultats pour des processus 1-dépendants à valeurs, non pas seulement dans $\{0,1\}$, mais dans un ensemble fini quelconque, en commençant par X_i à valeurs dans $\{0,1,2\}$.

Un autre problème intéressant serait d'étudier une version de cette notion pour des processus en temps continu.

2.4. Version de la propriété de Matsumoto-Yor Kummer-gamma pour des variables indexées par un arbre. Rappelons que, d'après la propriété de Matsumoto-Yor, les variables

$$U = \frac{1}{X+Y}, \quad V = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+Y}$$

sont indépendantes si et seulement si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes de lois respectives GIG et gamma avec des paramètres adéquats. Bien sûr, l'indépendance des variables U et V définies ci-dessus est équivalente à celle des variables

$$U_1 = X - \frac{1}{Y + 1/X}, \quad V_1 = Y + \frac{1}{X},$$

comme observé par Massam et Wesołowski (2004). En utilisant cette formulation, Massam et Wesołowski (2004) ont d'abord exprimé la propriété de Matsumoto-Yor en termes de variables associées aux sommets de l'arbre trivial à une arête, puis établi une version de la propriété pour des variables associées aux sommets d'un arbre fini quelconque. Une question naturelle est celle de l'existence d'une démarche analogue pour la propriété d'indépendance de type Matsumoto-Yor que nous avons obtenue pour le produit tensoriel de la loi de Kummer et de la loi gamma.

2.5. Etude spectrale des matrices de Kummer. Nous avons observé que la propriété de Matsumoto-Yor est valable aussi pour les matrices aléatoires suivant la loi de Kummer. Il serait intéressant de faire une étude des propriétés de ces matrices, concernant notamment le comportement de leurs valeurs propres, si cette étude n'est pas déjà disponible dans la littérature.

2.6. Arbres aléatoires, loi gaussienne inverse, grandes déviations et processus de Lévy.

- Un objectif est d'étendre à certains arbres aléatoires un résultat établi en 1998 en collaboration avec O. E. Barndorff-Nielsen (théorème 3.2) pour les arbres déterministes dont les arêtes sont chargées de résistances aléatoires de loi gaussienne inverse. Les calculs peuvent être commencés pour les arbres de Galton Watson (G-W) les plus simples possibles (binaires ou géométriques) en utilisant des résultats sur les arbres de G-W conditionnés par la taille. Si ces calculs donnent des résultats intéressants, alors on pourrait continuer le travail en passant à des Galton-Watson plus complexes ou à d'autres arbres aléatoires.
- Le travail ci-dessus méritera d'être complété par des résultats de grandes déviations pour la résistance équivalente dans le modèle décrit par l'article ci-dessus dans le cas des arbres infinis.
- La loi gaussienne inverse étant infiniment divisible, est la loi au temps 1 d'un processus de Lévy. Le modèle ci-dessus peut donc être considéré comme la version au temps 1 d'une famille de processus de Lévy indexée par les arêtes de l'arbre. Nous nous proposons d'étudier les propriétés de cette famille.

2.7. Probabilités de Lancaster de marges hyperboliques. Un problème resté ouvert dans ma thèse : caractériser les probabilités de Lancaster dont les marges sont la loi hyperbolique de paramètre λ :

$$\mu_\lambda(dx) = \frac{2^{\lambda-2}}{\pi\Gamma(\lambda)} \left|\Gamma\left(\frac{\lambda+ix}{2}\right)\right|^2 dx.$$

Les polynômes orthogonaux sont, dans ce cas, les polynômes de Pollaczek.

Bibliographie

[1] Barndorff-Nielsen, O.E. (1978) *Information and Exponential Families.* Wiley, New York.

[2] Barndorff-Nielsen, O. E. and Halgreen, C. (1977). Infinite divisibility of the Hyperbolic and generalized inverse Gaussian distribution. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, **38**, 309-312.

[3] Barrett, J. F. and Lampard, D. G. (1955). An expansion for some second-order probability distributions. *IRE Trans. Inform. Theory*, vol IT-1, 10–15.

[4] Bickel, P.J., Klaassen, C.A.J., Ritov, Y. and Wellner, J.A. (1993). *Efficient and Adaptive Statistical Inference for Semiparametric Models.* Baltimore, MD : Johns Hopkins University Press.

[5] Blacher, R. (1993). Higher order correlation coefficients, *Statistics* **25**, 1–15.

[6] Borodin, A., Diaconis, P. and Fulman, J. (2009). On adding a list of numbers (and other one-dependent determinantal processes). *Bulletin (New Series) of the Amer. Math. Soc.* , 47 **4**, 639–670.

[7] Brown, J. L., Jr. (1958). A criterion for the diagonal expansion of a second-order probability density in orthogonal polynomials. *IRE Trans. Inform. Theory*, vol IT-4, 172.

[8] Bryc, W. (1995). *The Normal Distribution.* Lecture Notes in Statistics. 100.

[9] Buja, A. (1990). Remarks on functional canonical variates, alternating least squares methodes and A.C.E. *Ann. Statist.* **18**, 1032–1069.

[10] Bussgang, J. J. (1952). Crosscorrelation functions of amplitude-distorded gaussian signals. *Mass. Inst. Tech., Res. Lab. Electronics, Cambridge, Mass., Tech. Rep.* No. 216.

[11] Casalis, M. (1996) The $2d+4$ simple quadratic natural exponential families on $\mathbb{R}^d$. *Ann. Statist.*, 24, 1828–1854.

[12] Chatterjee, S., Fulman, S. and Röllin, A. (2011). Exponential approximation by Stein's method and spectral graph theory. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **8**, 197–223.

[13] Chebana, F., El Adlouni, S. and Bobée, B. (2010). Mixed estimation methods for Halphen distributions with applications in extreme hydrologic events. *Stoch. Environ. Res. Risk Assess.* **24**, 359–376.

[14] Chen, L. H. Y. (1975). Poisson approximation for dependent trials. *Ann. Probab.* **3**, 534–545.

[15] Dauxois, J. and Pousse, A. (1975). Une extension de l'analyse canonique. Quelques applications. *Ann. Inst. H. Poincaré* Sect. B (N.S.) 11, 355–379.

[16] Diaconis, P. and Griffiths, R. (2012) Exchangeable pairs of Bernoulli random variables, Krawtchouck polynomials, and Ehrenfest urns. *Aust. N. Z. J. Stat.* **54**, 1, 81–101.

[17] Diaconis, P., Khare, K. and Saloff-Coste, L. (2008). Gibbs sampling, exponential families and orthogonal polynomials. *Statistical Science*, **23**(2), 151–178.

[18] Diaconis, P., Khare, K. and Saloff-Coste, L. (2010). Gibbs sampling, conjugate priors and coupling. *Sankhya*, **72** A Part 1, 136–169.

[19] Diaconis, P. and Ylvisaker, D. (1979) Conjugate priors for exponential families. *Ann. Statist.* 7, 269–281.

[20] Doyle, P. G., and Snell, J. L. (1984). *Random Walks and Electrical Networks.* The Carus Mathematical Monographs **22**, USA.

[21] Duerinckx, M., Ley, C. and Swan, Y. (2013). Maximum likelihood characterization of distributions. *Bernoulli,* to appear.

[22] Eberlein, E. and Hammerstein, E. A. (2004). Generalized hyperbolic and inverse Gaussian distributions : limiting cases and approximation of processes. *Prog. Probab.* **58**, 221–264.

[23] Fitzgerald, D. L. (2000). Statistical aspects of Tricomi's function and modified Bessel functions of the second kind. *Stoch. Environ. Res. Risk Assess.* **14**, 139–158.

[24] Gauss, C. F. (1809). *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium.* Cambridge Library Collection. Cambridge University Press, Cambridge. Reprint of the 1809 original.

[25] Good, I. J. (1953). The population frequencies of species and the estimation of population parameters, *Biometrika*, **40**, 237-260.

[26] Griffiths, B. (2009). Stochastic processes with orthogonal polynomial eigenfunctions. *J. Comput. Appl. Math.* 23, 739–744.

[27] Griffiths, R. C., Spanò D. (2013). Orthogonal Polynomial Kernels and Canonical Correlations for Dirichlet measures.*Bernoulli* 19, 548–598.

[28] Gupta, A. K., Cardeno, L. and Nagar, D. K.(2001). Matrix-variate Kummer-Dirichlet distributions. *J. Applied. Math.*, 117–139.

[29] Halphen, E. (1941). Sur un nouveau type de courbe de fréquence. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **213**, 633–635. Published under the name of "Dugué" due to war constraints.

[30] Hürlimann, W. (1998). On the characterization of maximum likelihood estimators for location-scale families. *Comm. Statist. Theory Methods* **27**, 495–508.

[31] Ibragimov, I. A. and Khas'minskii, R. Z. (1981). *Statistical Estimation. Asymptotic Theory*, Springer-Verlag.

[32] Iyengar, S. and Liao, Q. (1997). Modeling neural activity using the generalized inverse Gaussian distribution. *Biol. Cybern.* **77**, 289–295.

[33] Jorgensen B. (1982) *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution.* Springer-Verlag, Heidelberg.

[34] Joshi, R. M. and Joshi, J. M. C. (1985). Confluent hypergeometric function of second kind with matrix argument. *Indian J. pure appl. Math.* **16** (6), 627–636.

[35] Kagan, A. M., Linnik, Y. V. and Rao, C. R. (1973). *Characterization Problems in Mathematical Statistics*. Wiley, New-York.

[36] Kallenberg, W.C.M. (2008). Modelling dependence. *Insurance Math. Econom.* **42**, 1, 127–146.

[37] Koudou, A. E. (1995). *Problèmes de Marges et Familles Exponentielles Naturelles.* Thèse de l'université Paul Sabatier, Toulouse III.

[38] Lancaster, H. O. (1969). *The Chi-squared Distribution*, New York, John Wiley.

[39] Lancaster, H.O. (1975) Joint probability distributions in the meixner classes. *J. Roy. Statist. Soc.*, 37, 434-443.

[40] Le Cam, L. (1960). Locally asymptotically normal families of distributions. *Univ. Calif. Publ. in Stat.* **3**, 37–98.

[41] Le Cam, L. and Yang, G. L. (2000). *Asymptotics in statistics. Some basic concepts.* 2nd ed. Springer-Verlag, New York.

[42] Lemonte, A. J. and Cordeiro, G. M. (2011). The exponentiated generalized inverse Gaussian distribution. *Stat. Probab. Lett.* **81**, 506–517.

[43] Letac, G. (1992) *Lectures on natural exponential families and their variance functions.* Instituto de Matemática pura e aplicada : monografias de matemática, **50**, Rìo.

[44] Letac, G. and Wesołowski, J. (2000). An independence property for the product of GIG and gamma laws. *Ann. Prob.* **28**, 1371-1383.

[45] Letac, G. and Seshadri, V. (1983). A characterization of the generalized inverse Gaussian distribution by continued fractions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete.* **62**, 485–489.

[46] Ley, C. and Swan, Y. (2013). Stein's density approach and information inequalities. *Electron. Comm. Probab.* **18**, 1–14.

[47] Luk, H.-M. (1994). Stein's method for the gamma distribution and related statistical applications. Ph.D. thesis. University of Southern California. Los Angeles, USA.

[48] Marshall, A. W. and Olkin, I. (1993). Maximum likelihood characterizations of distributions. *Statist. Sinica* **3**, 157–171.

[49] Massam, H. and Wesołowski, J. (2004). The Matsumoto-Yor property on trees. *Bernouilli* **10**(4), 685-700.

[50] Massam, H. and Wesołowski, J. (2006). The Matsumoto-Yor property and the structure of the Wishart distribution. *Journal of Multivariate Analysis* **97**, 103–123.

[51] Matsumoto, H. and Yor, M. (2001). An analogue of Pitman's $2M - X$ theorem for exponential Wiener functional, Part II : the role of the generalized inverse Gaussian laws. *Nagoya Math. J.* **162**, 65–86.

[52] Matsumoto, H. and Yor, M. (2003). Interpretation via Brownian motion of some independence properties between GIG and gamma variables. *Stat. and Probab. Letters* **61**, 253–259.

[53] Meixner, J. (1934) Orthogonal Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzengenden Function. *J. London math. Soc.*, 9, 6–13.

[54] Morris, C.N. (1982) Natural exponential families with quadratic variance functions : statistical theory, *Ann. Statist.*, 11, 512–529.

[55] Nagar and Gupta (2002). Matrix-variate Kummer-beta distributions. *J. Austral. Math. Soc.* **73**, 11–25.

[56] Nelsen, R.B. (1999) *An introduction to copulas*, Springer-Verlag Inc (Berlin ; New York).

[57] Ng, K. W. and Kotz, S. (1995). Kummer-Gamma and Kummer-Beta univariate and multivariate distributions. *Research report*, Department of Statistics, The University of Hong Kong, Hong Kong.

[58] Perreault, L., Bobée, B. and Rasmussen, P. F. (1999a). Halphen distribution system. I : Mathematical and statistical properties. *J. Hydrol. Eng.* **4**, 189–199.

[59] Perreault, L., Bobée, B. and Rasmussen, P. F. (1999b). Halphen distribution system. II : Parameter and quantile estimation. *J. Hydrol. Eng.* **4**, 200–208.

[60] Poincaré, H. (1912). *Calcul des probabilités.* Carré-Naud, Paris.

[61] Pommeret, D. (1999). Stabilité des familles exponentielles naturelles par convolution. *C. R. Acad. Sci. Paris* t.328, Série I, 929–933.

[62] Ross, N. (2011). Fundamentals of Stein's method. *Probab. Surv.* **8**, 210–293.

[63] Seshadri, V. and Wesołowski, J. (2001). Mutual characterizations of the gamma and the Generalized inverse Gaussian laws by constancy of regression. *Sankhya,* **A 63**, 107-112.

[64] Stein, C. (1972). A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Vol 2, pp. 586-602). Berkeley : University of California Press.

[65] Stein, C., Diaconis, P., Holmes, S. and Reinert, G. (2004). Use of exchangeable pairs in the analysis of simulations. In *Persi Diaconis and Susan Holmes, editors, Stein's method : expository lectures and applications, volume 46 of IMS Lecture Notes Monogr. Ser, pages 1–26. Beachwood, Ohio, USA : Institute of Mathematical Statistics.*

[66] Teicher, H. (1961). Maximum likelihood characterization of distributions. *Ann. Math. Statist.* **32**, 1214–1222.

[67] van der Vaart, A. W. (1998). *Asymptotic Statistics.* Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press.

[68] Vallois, P. (1991). La loi Gaussienne inverse généralisée comme premier ou dernier temps de passage de diffusion. *Bull. Sc. Math.*, 2^e Série, **115**, 301–368.

[69] Wesołowski, J. (2002a). On a functional equation related to the Matsumoto-Yor property. *Aequationes Math.* **63**, 245-250.

[70] Wesołowski, J. (2002b). The Matsumoto-Yor independence property for GIG and gamma laws, revisited. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc* **133**, 153-161.

[71] Wong, E. (1963). The construction of a class of stationary Markov processes. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, Vol XVI, 264–276.

[72] Wong, E. and Thomas, J. B. (1962). On polynomial expansions of second-order distributions. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **10**, 507–516.